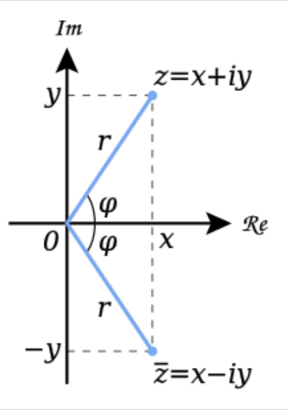
Вынужденные колебания. Переменный ток.

Гармонические функции **cos(ωt), sin(ωt)** являются **проекциями на оси x или y** равномерного движения по единичной окружности. Но бывает наоборот, удобнее при рассматрении **гармонических функций вернуться к движению по окужности.**

Дальше мы будем рассматривать **вынужленные колебания** в разных электрических системах, где вынуждающая сила – это гармоническая функция. Оказывается, что все токи и напряженая на разных элементах этой системы будут тоже гармоническими функциями, той же этой частоты, но со своими амплитудами, и фазами. Рассматривать на круге все это гораздо удобнее. Поэтому кратко освежим знание комплексных чисел.

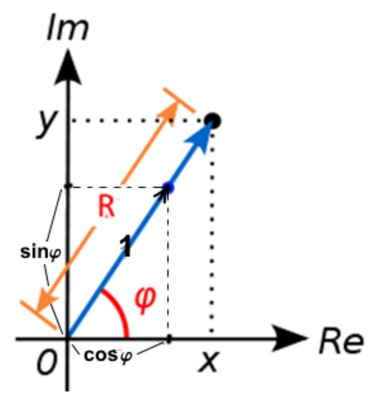
Повторим кратко тему «Комплексные числа».



В комплексных числах ось x **действительных чисел** (Re – от real, реальный, действительный) дополнена до плоскости введением оси **«мнимых чисел»** по оси y (Im – от imaginary, мнимый). Число выражается в виде z=a+ib, где **i – «мнимая единица»** по оси y со свойством **i^2= -1**, что в принципе не может выполняться для действительных чисел.

Комплексные числа появились, когда математикам понадобилось «как-то» отражать решения квадратного уравнения и с дескриминантом <0. Но комплексные числа оказались очень удобными и для работы с колебаниями.

Комплексному числу z=x+iy на плоскости соответствует радиус-вектор (x,y). В определенной мере к комплексным числам применима терминология векторов (например, «**вектор направления**»), но надо помнить о свойстве **i^2= -1.**



Комплексное число кроме «**алгебраической»** формы записи в виде z=x+iy, имеет и **тригонометрическую** («полярную») форму записи: z=R(cosφ+isinφ), где R=$\sqrt{(x^2+y^2)}$ – **модуль числа** z (|z|), а **(cosφ+isinφ) – это – «вектор направления»** единичной длины, с углом направления φ.

Сложение и вычитание комплексных чисел производится как у векторов, например: z_1=3-5i, z_2=-8+3i. z_1+z_2=(3-8)+(-5+3)i= -5-2i.

Умножение.

Можно умножать алгебраически, но помня, что i^2= -1. Например:

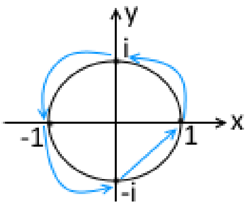
z_1=3-5i, z_2=-8+3i. $z_1 \cdot z_2$=3·(-8)+(-5i)·(-8)+3·3i+(-5i)·3i=

= -24+40i+9i+15=-9+49i.

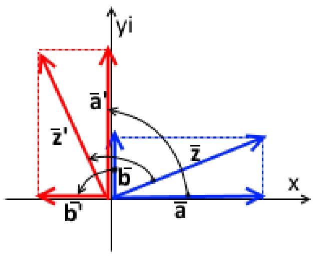
А можно умножать, используя тригонометрическую форму: амплитуды чисел перемножаются, а углы (т.н. «аргуиенты») складываются, например:

$z_1=3(\cos{}^{\pi}/_4 + i\sin{}^{\pi}/_4)$, $z_2=5(\cos{}^{\pi}/_2 + i\sin{}^{\pi}/_2)$, $z_1 \cdot z_2 = 15\cdot(\cos{}^{3\pi}/_4 + i\sin{}^{3\pi}/_4)$.

Покажем кратко, почему при умножении в тригонометрической форме амплитуды перемножаются, а углы складываются. Покажем это за 3 шага.

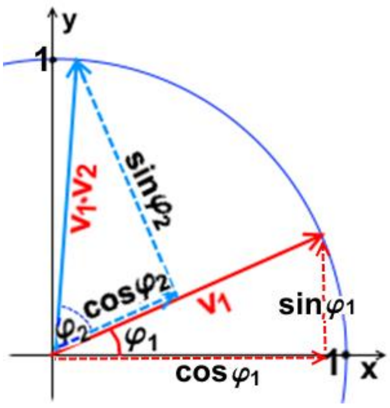


1)Сначала покажем, что числа, находящиеся на осях x и y, типа +1,+i, -1 -i при умножении на i поворачивается на **90°** ($^{\pi}/_2$) в положительном направлении (против часовой стрелки). Умножаем на i: **+1·i=i , +i·i = -1, -1·i = -i , -i·i =1.**

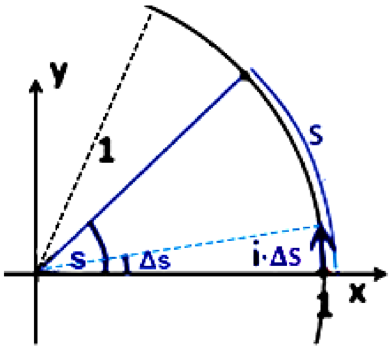


2)Покажем, что любое комплексное число при умножении на i тоже поворачивается но + $^{\pi}/_2$. Любое комплексное число z=(a+bi) представимо в виде суммы векторов по осям x и y: a и ib. Каждый из них при умножении на i поворачивается на $+{}^{\pi}/_{2}$. a -> ia', ib -> b' (синие вектора переходят в красные). А значит, и всё число z=(a+bi) поворачивается на $+{}^{\pi}/_{2}$, z ->z'.

3)Умножим **z_1= A(cosφ_1+isinφ_1)** на **z_2= B(cosφ_2+isinφ_2)**. A·B - это амплитуда (модуль) произведения **$z_1 \cdot z_2$**, поскольку, как покажем, произведение **векторов направлений z_1 и z_2: v_1=(cosφ_1+isinφ_1) и v_2=(cosφ_2+isinφ_2)** – это тоже **вектор направления (с модулем =1)** и не влияет на амплитуду (модуль) ответа.



Рассмотрим результат умножения векторов направления v_1 и v_2. Вектор v_1 умножим поочередно на части **v_2: cosφ_2** и **i·sinφ_2** (помня, что $|v_1|=1$). Произведение $v_1 \cdot$ **cosφ_2**. – это вектор вдоль v_1 длиной **cosφ_2**. Произведение v_1 на **i·sinφ_2** - это вектор, повернутый на $+{}^{\pi}/_{2}$ относительно v_1 (из-за i) длиной **sinφ_2 .(Обе компоненты отмечены на рисунке). Складаем полученные 2 вектора** – части $v_1 v_2$. Видим по рисунку, что $v_1 v_2$ – **это** вектор, отмеченный синим, и что это **вектор направления**, повернутый на угол φ_2 относительно v_1. Значит, результат $v_1 \cdot v_2$ – это **вектор направления** с углом **φ= φ_1 + φ_2** . (Традиционно это свойство доказывается, используя формулы **cos(φ_1+φ_2)** и **sin(φ_1+φ_2). Проще наоборот!)**

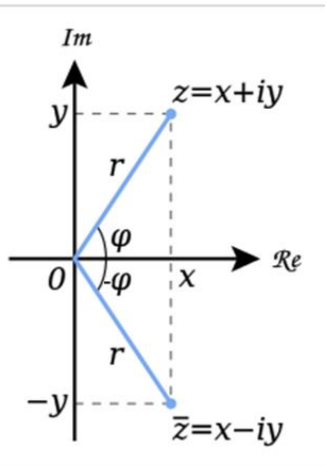


Покажем теперь простой смысл важной **формулы Эйлера, $e^{i\varphi}$ = cosφ+isinφ.**

Напомним, что именно для числа «e» (2.73...) для малых чисел Δs есть приближение **$e^{\Delta s} \approx 1+\Delta s$**. Тогда **$e^{i\cdot\Delta s}$** $\approx 1+i\cdot\Delta s$. Это по сути дела (видно на рисунке) **вектор направления** с малым углом Δs в радианах, поскольку на единичной окружности длина дуги Δs соответствует углу в радианах.

Возьмем некоторое s= n·Δs. Возведем **$e^{i\cdot\Delta s}$** в степень n. **$(e^{i\cdot\Delta s})^n = e^{i\cdot n\Delta s} = e^{i\cdot s}$. Теперь сделаем то же с** $1+i\cdot\Delta s$. Возведем наш вектор направления $1+i\cdot\Delta s$ в степень n. По только что доказанному свойству, о том, что углы складываются, получаем вектор направлния с углом n·Δs=s, т.е. $(1+i\cdot\Delta s)^n \approx$ cos(s)+isin(s).

То, что получили, – приближение. Но уменьшая Δs и увеличивая n (но так, чтобы n·Δs=s), в пределе получаем точное соотношение **$e^{i\varphi}$ = cosφ+isinφ, формулу Эйлера.**



Вспомним на примере понятие т.н. сопряженных комплексных чисел.

«Сопряженными» называются два комплексных числа, отличающихся только знаком мнимых частей. На рисунке изображена пара таких чисел **z_1=x+iy** и **z_2=x-iy**. Покажем, что их произведение равно **r^2**.

Перемножим сначала алгебраически: **(x+iy)·(x-iy)** = $x^2 - (iy)^2 = x^2+y^2=r^2$.

Перемножим теперь эти 2 числа в тригонометрической форме: Перемножаем амплитуды: $r \cdot r=r^2$. А суммарный угол =0. Ответ тот же r^2.

Свойство перемножения сопряженных чисел используется для алгебраического деления комплексных чисел. Например, делим **${}^{1+2i}/_{3-5i}$** . Умножим числитель и знаменатель на сопряженное с 3-5i число:

${}^{(1+2i)(3+5i)}/_{(3-5i)(3+5i)}$. В числителе получаем:

В числителе: **(1+2i)(3+5i)**=(1·3 - 2·5)+i(1·5+2·3) = -9+11i.

А в знаменателе: 3^2+5^2=34. Ответ: **$-{}^{9}/_{34}+{}^{11}/_{34}\cdot i$.**

Нам часто понадобится использовать ${}^{1}/_{i}$ = - i , т.к. i·(-i)=1. Помните это свойство.