**Элективный курс по математике**

**для учащихся 5-6 класса**

**«Нестандартное мышление»**

Содержание

[Занятие №1 5](#_Toc503358447)

[Разминка – Устный счет «Умножение чисел до 10» 5](#_Toc503358448)

[Задачи 5](#_Toc503358449)

[Занятие №2 8](#_Toc503358450)

[Разминка – Устный счет «Умножение чисел больше 10» 8](#_Toc503358451)

[Задачи 8](#_Toc503358452)

[Занятие №3 11](#_Toc503358453)

[Разминка – Устный счет «Опорное число – Число 10 в качестве опорного» 11](#_Toc503358454)

[Задачи 11](#_Toc503358455)

[Занятие №4 13](#_Toc503358456)

[Разминка – Устный счет «Опорное число – Число 100 в качестве опорного» 13](#_Toc503358457)

[Задачи 13](#_Toc503358458)

[Занятие №5 15](#_Toc503358459)

[Разминка – Устный счет «Умножение чисел от 10 до 20» 15](#_Toc503358460)

[Задачи 15](#_Toc503358461)

[Занятие №6 17](#_Toc503358462)

[Разминка – Устный счет «Умножение чисел от 10 до 30» 17](#_Toc503358463)

[Задачи 17](#_Toc503358464)

[Занятие №7 20](#_Toc503358465)

[Разминка – Устный счет «Умножение чисел больше 100» 20](#_Toc503358466)

[Задачи 20](#_Toc503358467)

[Занятие №8 22](#_Toc503358468)

[Разминка – Устный счет – Комбинация методов 22](#_Toc503358469)

[Задачи 22](#_Toc503358470)

[Занятие №9 25](#_Toc503358471)

[Разминка – Устный счет Комбинация методов 25](#_Toc503358472)

[Задачи 25](#_Toc503358473)

[Занятие №10 27](#_Toc503358474)

[Разминка – Устный счет – Перемножение чисел над и под опорным числом 27](#_Toc503358475)

[Задачи 28](#_Toc503358476)

[Занятие №11 30](#_Toc503358477)

[Разминка – Устный счет – Произведение чисел в кружках 30](#_Toc503358478)

[Задачи 30](#_Toc503358479)

[Занятие №12 34](#_Toc503358480)

[Разминка – Устный счет – Проверка ответов “Числа-подстановки” 34](#_Toc503358481)

[Задачи 35](#_Toc503358482)

[Занятие №13 36](#_Toc503358483)

[Разминка – Устный счет – Проверка ответов “Выбрасывание девяток” 36](#_Toc503358484)

[Задачи 36](#_Toc503358485)

[Занятие №14 40](#_Toc503358486)

[Разминка – Устный счет – Умножение по множителям 40](#_Toc503358487)

[Задачи 41](#_Toc503358488)

[Занятие №15 43](#_Toc503358489)

[Разминка – Умножение по множителям 43](#_Toc503358490)

[Задачи 43](#_Toc503358491)

[Занятие №16 45](#_Toc503358492)

[Задачи 45](#_Toc503358493)

[Занятие №17 47](#_Toc503358494)

[Задачи 47](#_Toc503358495)

[Занятие №18 48](#_Toc503358496)

[Задачи 48](#_Toc503358497)

[Занятие №19 54](#_Toc503358498)

[Задачи 54](#_Toc503358499)

[Занятие №20 57](#_Toc503358500)

[Задачи 57](#_Toc503358501)

[Занятие №21 59](#_Toc503358502)

[Задачи 59](#_Toc503358503)

[Занятие №22 63](#_Toc503358504)

[Задачи 63](#_Toc503358505)

[Занятие №23 66](#_Toc503358506)

[Задачи 66](#_Toc503358507)

[Занятие №24 69](#_Toc503358508)

[Задачи 69](#_Toc503358509)

[Занятие №25 72](#_Toc503358510)

[Задачи 72](#_Toc503358511)

[Занятие №26 75](#_Toc503358512)

[Задачи 75](#_Toc503358513)

[Занятие №27 78](#_Toc503358514)

[Задачи 78](#_Toc503358515)

[Занятие №28 80](#_Toc503358516)

[Задачи 80](#_Toc503358517)

[Занятие №29 82](#_Toc503358518)

[Задачи 82](#_Toc503358519)

[Занятие №30 84](#_Toc503358520)

[Задачи 84](#_Toc503358521)

[Используемые источники: 86](#_Toc503358522)

[Приложение 1 – Пояснение метода Решения примеров в уме 87](#_Toc503358523)

[Приложение 2 –“Использование опорного числа” 88](#_Toc503358524)

[Приложение 3 –“Метод быстрого вычитания” 88](#_Toc503358525)

[Приложение 4 –“Метод проверки ответов - выбрасывание девяток” Каким образом работает данный метод? 89](#_Toc503358526)

[Приложение 5 –Дополнительные задачи на смекалку 90](#_Toc503358527)

# **Занятие №1**

**Арифметика (числовые ребусы, дроби и т.п.)**

## **Разминка – Устный счет «Умножение чисел до 10»**

Возьмем в качестве примера произведение 7 × 8.

Запишем 7 × 8 = на листе бумаги и нарисуем кружки под каждым из двух перемножаемых чисел



Рассмотрим первый из множителей, число 7. Сколько ему недостает до числа 10? Ответ:3. Впишем в кружок под числом 7. Теперь обратимся к числу 8. Что надо вписать в кружок под числом 8? Сколько недостает до 10? Ответ:2. Вписываем 2 в кружок под множителем 8.

Вот что у нас получилось:



Теперь выполним вычитание накрест. Это значит, надо вычесть любое из чисел в кружке (3 или 2) из числа не прямо над ним, а из того, что расположено по диагонали, то есть над другим числом в кружке. Иными словами, вы вычитаете один раз, поэтому выбирайте тот вариант, который вам кажется легче. В любом случае результат получится один и тот же: 5. Это первая цифра ответа:

$8-3=$5 или 7-2=5

Теперь перемножим числа в кружках.

$$3×2=6$$

Это будет последняя цифра ответа. Таким образом, ответом будет 56. Вот так выглядит решенная задача:



**Для самостоятельного решения:**

**а)** $9×9$; **б)** $8×8$; **в)** $7×7$; **г)** $7×9$; **д)** $8×9$; **е)** $9×6$;

**ж)** $5×9$; **з)** $8×7$;

## **Задачи**

1. **МУХА + УХА + ХА + А = 2000**.

*Решение:* Со всей определенностью можно утверждать, что **А = 5, и М = 1 или 2.** Допустим **А = 0**, тогда **Х · 3** должно оканчиваться на 0. Этого не может быть, так как при умножении **любого числа** на 3 результат не оканчивается на **0**. В таком случае число **Х = 6**, так как при **А = 5** и **Х · 3** должно оканчиваться на 8. Сумма **У + У** должна оканчиваться на **8**. Это возможно при **У = 4** или **9**. Итак, **У = 4**. **М** может быть равным только **1**.

**Ответ**:**1465 + 465 + 65 + 5 = 2000**.

1. Квадрат натурального числа состоит из цифр 0; 2; 3; 5. Найти его.

*Решение:* Квадрат числа не может оканчиваться цифрами 2 или 3, или одним нулём. Значит, последняя цифра равна 5, тогда цифра десятков равна 2. Следовательно, искомое число **3025 = 552.**

**Ответ**: **3025**

1. На карточках записаны цифры: 1, 2, 0. Из этих карточек составлены числа и записано неверное равенство. Покажите, как, переместив только одну карточку, сделать равенство верным.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **1** | **0** | **1** | **\_** | **1** | **0** | **2** | **=** | **1** |

**Ответ: 101 – 102 = 1**

1. **АТУ+ИАЗ=ИИТЕ**

**НЕГ:ИОГ=Е
ПАУ-НЗ=ППА**

Каждая буква здесь обозначает определенную цифру. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры. Математические знаки показывают действия, которые производятся и по горизонтали и по вертикали. Определив числовое значение каждой буквы, расставьте буквы соответственно их числовому значению — от 0 до 9. При этом получится математический термин.

*Решение:* Скорее всего, **И=1, А = 9, Г=0** или **Г=5**. Значит, 9ТУ + 19З = 11ТЕ. Значит, У+З=1Е, в то же время из последнего примера П9У-НЗ=ПП9, имеем что У-З=9, то есть У=6,З=7 или У=7,З=8. Пусть У=7,З=8, тогда Е=5, а значит Г=0. Тогда из Н50 : 1О0=5, получим, что О=3, Н=6. Рассмотрим П97-68=ПП9 , П=2. Тогда Т=4. Итак, Г=0, И=1, П=2, О=3, Т=4, Е=5, З=6, А=9.

**Ответ: Гипотеза.**

1. Кассир продал все билеты в первый ряд кинотеатра, причем по ошибке на одно из мест было продано два билета. Сумма номеров мест на всех этих билетах равна 857. На какое место продано два билета?

*Решение:* Выясним, сколько мест могло быть в первом ряду. Во-первых, их не больше 40, так как сумма натуральных чисел от 1 до 41 равна 861. Во-вторых, их не меньше 40, так как сумма натуральных чисел от 1 до 39 равна 780, и даже после прибавления к ней 39, результат будет меньше 857. Значит в первом ряду ровно 40 мест. Теперь несложно определить, на какое место был продан лишний билет: 1 + … + 40 = 820; 857 – 820 = 37.

**Ответ: 37.**

1. Когда солдаты строились в колонну по 4, по 5 или по 6 человек, то каждый раз один оставался лишним, а когда построились в колонну по 7, лишних не осталось. Каким могло быть наименьшее количество солдат?

*Решение:* следовательно, если от этого числа отнять 1, то разность должна делиться и на 4, и на 5, и на 6, то есть на 60. Числа 61, 121, 181, 241 на 7 не делятся. Значит, наименьшее число солдат 301.

**Ответ: 301**

# **Занятие №2**

**Арифметика (числовые ребусы, дроби и т.п.) продолжение**

## **Разминка – Устный счет «Умножение чисел больше 10»**

Возьмем в качестве примера произведение 96 × 97.

Запишем 96 × 97 = на листе бумаги и нарисуем кружки под каждым из двух перемножаемых чисел

$$96×97=$$

К какому большему числу следует привести эти числа? Сколько не хватает до чего? До 100. Вписываем 4 в кружок под 96 и 3 под 97

Вот что у нас получилось:



Что мы делаем теперь? Мы вычитаем накрест: 96 минус 3, так же как и 97 минус 4, равно 93. Это первая (передняя) часть ответа. Что мы делаем затем; Перемножаем числа в кружках. Произведение 4 на 3 равняется 12. Это последняя (задняя) часть ответа. Сам ответ, соответственно, равен 9312.



**Для самостоятельного решения:**

**а)** $96×96$; **б) 97**$×95$; **в)** $95×95$; **г)** $98×95$; **д)** $98×94$; **е)** $97×94$;

**ж)** $98×92$; **з)** $97×93$.

## **Задачи**

1. Крестьянин попросил взять у царя одно яблоко из его сада. Царь разрешил. Пошел крестьянин к саду и водит: весь сад огражден тройным забором, имеет одни ворота, вход в которые охраняет сторож. Подошел крестьянин к Первову сторожу и говорит: «Царь разрешил мне взять одно яблоко из сада». На что сторож ему сказал: «Возьми, но при выходе отдашь мне половину тех яблок, что возьмёшь и ещё одно». Эти же слова повторили крестьянину 2 и 3 сторожа, охранявшие другие ворота. Сколько яблок должен взять крестьянин, чтобы после того, как он отдаст положенную часть 3 сторожам, у него осталось одно яблоко?

*Решение:* Рассуждаю, начиная с конца, чтобы пройти из сада через последние ворота, крестьянин должен иметь 4 яблока, так как половина этих яблок и ещё одно 4: 2 +1 = 3 яблока он отдаст сторожу и у него останется 4 – 3 = 1 яблоко. Подходя из сада ко вторым воротам, у крестьянина должно быть по условию задачи 2·(4 + 1) = 10 яблок, подходя к первым воротам яблок, было 2·(10 + 1) = 22.

**Ответ:** 22 яблока должен взять крестьянин, чтобы после того, как он отдаст положенную часть 3 сторожам, у него осталось одно яблоко.

1. Лошадь съедает копну сена за 2 суток, корова – за 3, овца – за 6 суток. За какое время съедят копну сена лошадь, корова и овца вместе?

*Решение:* Лошадь съедает копны сена за 1 сутки, корова – за копны за сутки, овца – копны в сутки. Значит, ++= 1 за одни сутки.

**Ответ:** 1 копну за 1 сутки.

1. Охотник встретил двоих пастухов. У одного пастуха было три куска хлеба, у второго - пять кусков. Все куски хлеба одинакового размера. Все трое разделили и съели весь хлеб поровну. Охотник дал пастухам после еды 8 монет на двоих. Как пастухи разделили эти деньги?

*Решение*: каждый съел по 2 и 2/3 куска хлеба. Поэтому первый пастух дал охотнику только 1/3 куска, а второй еще 2 и 1/3 куска.

Ответ: **Первый получил 1 монету, второй 7.**

1. К числу 43 припишите слева и справа по одной цифре так, чтобы полученное число делилось на 45.

 **Ответ.** 2430, 6435

1. Три рыбака решили сообща сварить на костре уху. Первый дал два окуня, второй четыре, а третий рыбак внес свою долю деньгами, дав 60 рублей. Как должны разделить между собой эти деньги первые два рыбака?

*Решение*. На уху пошло 6 окуней, то есть каждому досталось по 2. Первый съел свои 2 окуня, то есть сколько дал, то и съел. Значит, третий съел два окуня из улова второго рыбака. Следовательно, **все деньги должен взять второй рыбак**.

Ответ: **все деньги должен взять второй рыбак**.

**6.** Охотник встретил двоих пастухов. У одного пастуха было три куска хлеба, у второго - пять кусков. Все куски хлеба одинакового размера. Все трое разделили и съели весь хлеб поровну. Охотник дал пастухам после еды 8 монет на двоих. Как пастухи разделили эти деньги?

*Решение*: каждый съел по 2 и 2/3 куска хлеба. Поэтому первый пастух дал охотнику только 1/3 куска, а второй еще 2 и 1/3 куска.

Ответ: **Первый получил 1 монету, второй 7.**

**6.** Было совершено 52 распила и получили 72 полена. Сколько всего было бревен?

*Решение*: Т.к. после каждого распила число бревен увеличивается на 1. Значит 72-52=20

Ответ: 20 бревен.

# **Занятие №3**

**Задачи на составление уравнений**

## **Разминка – Устный счет «Опорное число – Число 10 в качестве опорного»**

Вернемся к примеру 7 × 8.

Число 10 слева от примера является опорным. Это число, из которого мы вычитали множители.



Итак, запишем опорное число слева от примера. Теперь спросим себя, числа, которые мы перемножаем, являются больше (выше) или меньше (ниже), чем опорное число? В рассматриваемом случае множитель меньше (ниже), чем опорное число, оба раза. Поэтому рисуем кружки ниже множителей. На сколько множители меньше опорного числа? На 3 и 2 соответственно. Вписываем 3 и 2 в кружки. 7 равно 10 минус 3, поэтому ставим знак «минус» и перед кружком с цифрой 3.



Теперь вычитаем накрест. 7 минус 2 и 8 минус 3 дают 5. Записываем 5 после знака равенства. Теперь умножим 5 на опорное число 10. 5, умноженное на 10, дает 50, поэтому записываем 0 после 5. (При умножении любого числа на 10 достаточно дописать к числу справа нуль.) 50 является нашим промежуточным результатом.

Теперь перемножим числа в кружках. 3 на 2 дает 6. Прибавим результат к 50 и получим окончательный ответ: 56.

Полностью решенный пример выглядит так:



## **Задачи**

**1.** Количество отсутствующих в классе составляло 1/6 всех присутствующих. После того, как один ученик вышел, количество отсутствующих стало составлять 1/5 присутствующих. Сколько учеников в классе?

*Решение:*  Пусть сейчас в классе *х* человек, тогда отсутствующих . После того, как вышел 1 человек, отсутствующих стало, что по условию задачи составляет 1/5 присутствующих, т.е. . Получили уравнение =, т.е. *х*=36. Значит, сейчас присутствуют 36 человек, а отсутствуют 6. Следовательно, в **классе 42 человека**.

**Ответ: 42 человека**

**2****.** Петя съел 1/3 всех яблок и ещё 2 яблока, Сеня съел 1/4 всех яблок и ещё 1 яблоко, а Коля — половину тех яблок, которые остались после Пети и Сени. После этого осталась 1/6 часть первоначального числа яблок. Сколько яблок было вначале?

*Решение:* х – всего яблок. , х=**36.**

**Ответ: 36**

**3**. Отцу 41 год, старшему сыну 13 лет, дочери 10 лет и младшему сыну 6 лет. Через сколько лет возраст отца будет равен сумме лет его детей?

Решение: Обозначим искомое количество лет через х. Составим уравнение: 13+х+10+х +6+х=41+х. Тогда х=6.

**Ответ: через 6 лет.**

**4.** На двух кустах сидело 25 воробьев. После того как с первого куста перелетело на второй 5, а со второго улетело 7 воробьев, то на первом кусте осталось вдвое больше воробьев, чем на втором. Сколько воробьев было на каждом кусте первоначально?

***Решение:*** Пусть *x* – количество воробьёв на первом кусте. Тогда x–5=2·(25–x–7+5). Решаем, и получаем, что *x* = **17**.

1. Количество отсутствующих в классе составляло 1/4 всех присутствующих. После того, как один ученик вышел, количество отсутствующих стало составлять 1/3 присутствующих. Сколько учеников в классе?

Ответ: \_\_\_ человека

1. **.** Петя съел 1/4 всех яблок и ещё 3 яблока, Сеня съел 1/5всех яблок и ещё 2 яблока, а Коля — половину тех яблок, которые остались после Пети и Сени. После этого осталась 1/3 часть первоначального числа яблок. Сколько яблок было вначале?

Ответ:

# **Занятие №4**

**Задачи на проценты**

## **Разминка –** **Устный счет «Опорное число – Число 100 в качестве опорного»**

Вернемся к примеру 96 × 97.

Число 100 слева от примера является опорным. Это число, из которого мы вычитали множители.

Итак, запишем опорное число слева от примера. Теперь спросим себя, числа, которые мы перемножаем, являются больше (выше) или меньше (ниже), чем опорное число? В рассматриваемом случае множитель меньше (ниже), чем опорное число, оба раза. Поэтому рисуем кружки ниже множителей. На сколько множители меньше опорного числа? На 4 и 3 соответственно. Вписываем 4 и 3 в кружки. 96 равно 100 минус 4, поэтому ставим

Теперь вычитаем накрест. 96 минус 3 и 97 минус 4 дают 93. Записываем 93 после знака равенства. Теперь умножим 93 на опорное число 100. 93, умноженное на 100, дает 9300, поэтому записываем 00 после 93. (При умножении любого числа на 100 достаточно дописать к числу справа 2 нуля.) 9300 является нашим промежуточным результатом.

Теперь перемножим числа в кружках. 4 на 3 дает 12. Прибавим результат к 9300 и получим окончательный ответ: 9312.

Полностью решенный пример выглядит так:



**Для самостоятельного решения:**

**а)** $96×96$; **б) 97**$×97$; **в)** $99×99$; **г)** $95×95$; **д)** $98×94$; **е)** $97×94$;

**ж)** $98×92$; **з)** $97×93$

## **Задачи**

**1.** Число увеличено на *25%.* На сколько процентов нужно уменьшить результат этого увеличения, чтобы получить первоначальное число?

*Решение:* Первоначальное = х, новое = 1,25х. 1,25*х* = 100%

 *х*  = ?%

Получили 80%, значит, надо уменьшить **на 20%.**

**Ответ: на 20%**

**2.** У старшего брата на *25%* больше денег, чем у младшего. Сколько процентов своих денег старший должен дать младшему, чтобы денег у них стало поровну?

*Решение:* Пусть у младшего *х* рублей, тогда у старшего 1,25*х*. Чтобы у них стало одинаково, старший должен отдать 0,125*х* рублей. Итак, 1,25*х*  = 100%

1,125 *х* = ?%

Получили 90%, значит отдать старший брат должен 10% своих денег.

**Ответ: 10% своих денег**

**3**. Картофель подешевел на 20%. На сколько больше можно купить картофеля на ту же сумму?

*Решение*. Т.к. картофель подешевел на 20%, то на весь купленный ранее картофель надо затратить 80% имевшихся денег, а на оставшиеся 20% купить еще 1/4 часть картофеля, что **составляет 25%.**

**Ответ:25%**

**4**. Первый множитель увеличился на 10%, а второй множитель уменьшился на 10%. Как при этом изменилось произведение?

*Решение*. Пусть множимое х, а множитель у, тогда новое множимое 1,1х, а 0,8у – новый множитель. Новое произведение равно 0,99ху, следовательно, произведение **уменьшилось на 1%.**

**Ответ: уменьшилось на 1%.**

**5.** Первый множитель увеличился на 22%, а второй множитель уменьшился на 22%. Как при этом изменилось произведение

Ответ:\_\_\_\_

6. Яблоки подорожали на 35%. На сколько меньше можно купить яблок на ту же сумму?

Ответ:\_\_\_\_

# **Занятие №5**

**Числовая задача (построение примера, доказательство невозможности его построения).**

## **Разминка – Устный счет** **«Умножение чисел от 10 до 20»**

В качестве примера возьмем 13 × 14, а 10 – в качестве опорного числа.



И 13, и 14 больше (выше) опорного числа 10, поэтому рисуем кружки над множителями. На сколько они больше опорного числа? На 3 и 4 соответственно. Поэтому вписываем 3 и 4 в кружки над 13 и 14. 13 равно 10 плюс 3, поэтому ставим знак «плюс» перед цифрой 3; 14 равно 10 плюс 4, поэтому ставим знак «плюс» перед цифрой 4.



Складываем накрест. И 13 плюс 4, и 14 плюс 3 равно 17. Пишем 17 после знака равенства. Умножаем 17 на опорное число 10 и получаем 170 – это наш промежуточный результат, записываем его после знака равенства.

В качестве последнего шага перемножаем числа в кружках. 3, умноженное на 4, равно 12. Прибавляем 12 к 170 и получаем ответ: 182. Вот так выглядит полностью решенный пример:



**Если числа в кружках выше множителей, мы складываем накрест, если же они ниже, тогда вычитаем накрест.**

**Для самостоятельного решения:**

**а)** $12×15$; **б)** 13$×15$; **в)** $12×12$; **г)** $13×13$; **д)** $12×14$; **е)** $12×16$;

**ж)** $14×14$; **з)** $12×18$

## **Задачи**

**1.** Половина — это его треть. Что же это за число?

*Решение*: если половина есть треть числа *х*, то все число *х* содержит 3 раза по половине, то есть 0,5 \* 3 = **1,5**

**Ответ: 1,5**

**2**. Найдите сумму чисел 1+2+…+870+871.

*Решение.* Запишем сумму S=1+2+…+871 так: S= 871+… +2+1. Сложив эти равенства, получим 2S= (1+871)+(2+870)+…(436+436). Откуда 2 S =872·871, S=379756.

**Ответ: 379756**

**3.** Какой цифрой заканчивается сумма 135х+31у+56х+у , если *х* и *у* натуральные числа?

*Решение.* Число 135х оканчивается на 5; 31у оканчивается на 1, число 56х+у оканчивается на 6; следовательно, сумма 135х+31у+56х+у оканчивается **на 2**.

**Ответ: 2**

**4.** Продолжите ряд чисел: 10,8,11,9,12,10 до 8 числа. По какому правилу он составлен?

*Решение*. 10,8,11,9,12,10,**13,11,**…Правило следующее: на нечетных местах ряда стоят последовательно натуральные числа, начиная с 10, а на четных, начиная с 8.

**5.** На какую цифру оканчивается число 2100?

*Решение.* Представим число 2100 в виде 2100= (24)25=1625, следовательно, оно оканчивается на 6.

**Ответ: 6**

**6.** Из числа 12345678910111213…5960 вычеркнуть 100 цифр так, чтобы полученное число было наибольшим?

*Решение*. Наибольшее возможное число должно начинаться с наибольшего количества девяток. Будем двигаться по числу слева направо, вычеркивая все цифры, кроме 9. вначале мы вычеркнем 27 цифр: 12345678 - 8 цифр 101112112314151617181- 19 цифр и получим число 99**2021222324252627282**9…5960 (еще 19 цифр) и т.д. Таким образом, до каждой очередной девятки мы вычеркиваем 19 цифр. Сделав еще 2 шага, мы вычеркиваем 38 цифр и получим число 999995051525354555657585960 (до следующей 9 еще 19 цифр). За предыдущие шаги было вычеркнуто 84 цифры (осталось вычеркнуть еще 16), следовательно, до очередной 9 мы не доберемся. Наибольшая цифра, до которой можно добраться, вычеркнув 15 цифр - это 7. Вычеркнув далее цифру 5, мы получим наибольшее возможное число **99999785960**.

**Ответ: 99999785960.**

# **Занятие №6**

**Числовая задача (построение примера, доказательство невозможности его построения) - продолжение**

## **Разминка – Устный** **счет «Умножение чисел от 10 до 30»**

В качестве примера возьмем 12 × 21, а 10 – в качестве опорного числа.

И 12, и 21 больше (выше) опорного числа 10, поэтому рисуем кружки над множителями. На сколько они больше опорного числа? На 2 и 11 соответственно. Поэтому вписываем 2 и 11 в кружки над 12 и 21. 12 равно 10 плюс 2, поэтому ставим знак «плюс» перед цифрой 2; 21 равно 10 плюс 11, поэтому ставим знак «плюс» перед цифрой 11.



21 плюс 2 равно 23, которое после умножения на 10 дает 230. 2, умноженное на 11, равно 22, которое в сумме с 230 равняется 252.

Полностью решенный пример выглядит следующим образом:



**Для самостоятельного решения:**

**а)** $12×27$; **б)** 13$×25$; **в)** $11×22$; **г)** $13×23$; **д)** $22×24$; **е)** $12×16$;

**ж)** $14×24$; **з)** $12×28$

## **Задачи**

**1.** Задумано трехзначное число, у которого с любым из чисел 543,142 и 562 совпадает с одним из разрядов, а 2 других не совпадают. Какое число задумано?

*Решение*. Если первая цифра искомого числа 5, то либо вторая цифра 4, либо третья 2 (т.к. требуется совпадение разряда со вторым числом). И то и другое приводит к противоречию: совпадение либо с 1, либо с третьим будет в двух разрядах, следовательно, первая цифра не 5. Рассуждая аналогично, убеждаемся, что вторая цифра искомого числа не 4, а третья не 2. Остается единственная возможность: число 163.

**Ответ: 163**

**2.** К двухзначному числу справа приписали 3 и оно увеличилось в 9 раз. Что это за число?

*Решение*.

|  |  |
| --- | --- |
| Этап рассуждений | Выводы |
| аб\*9=аб3 | б=7, т.к. произведение 7\*9 оканчивается на 3 |
| а7\*9=а73 | а=8, поскольку а73 делится на 9 |

Проверкой убеждаемся, что 87\*9=873, т.е. искомое число **87**

**Ответ: 87**

**3.** Какое число больше: 2379\*23782378 или 2378\*23792379?

*Решение.* Пусть, а=2378, б=2379, тогда можно составить таблицу:

|  |  |
| --- | --- |
| Число | Обозначение |
| 23782378=23780000+2378 | 10000а+а=10001а |
| 23792379=23790000+2379 | 10000б+б=10001б |
| 2379\*23792378 | б\*10000а=10001аб |
| 2378\*23792379 | а\*10000б=10001аб |

Из которой следует, что 2379\*23782378**=**2378\*23792379.

Ответ: Равны

**4.** Верно ли что число 1 234 537 896 543 является квадратом некоторого натурального числа?

*Решение*. Число 1234537896543 **не является квадратом** натурального числа, т.к. квадрат натурального числа может оканчиваться только цифрами 0,1,5,6,9.

**Ответ: не является**

**5 (закрепляем 3).** К двухзначному числу справа приписали 4 и оно увеличилось в 5 раз. Что это за число?

*Решение*.

|  |  |
| --- | --- |
| Этап рассуждений | Выводы |
|  |  |
|  |  |

Проверкой убеждаемся, что , т.е. искомое число

**Ответ: \_\_\_\_\_\_\_**

**6 (закрепляем 3).** К трехзначному числу справа приписали 5 и оно увеличилось в 7 раз. Что это за число?

*Решение*.

|  |  |
| --- | --- |
| Этап рассуждений | Выводы |
|  |  |
|  |  |

Проверкой убеждаемся, что , т.е. искомое число

**Ответ: \_\_\_**

# **Занятие №7**

**Фигуры, нахождение многоугольника с указанными свойствами или на площади и разрезания**

## **Разминка – Устный счет «Умножение чисел больше 100»**

В качестве примера возьмем 106 × 104, а 100 – в качестве опорного числа.

Множители превышают опорное число 100, поэтому рисуем кружки над 106 и 104. На сколько они превышают 100? На 6 и 4. Вписываем 6 и 4 в кружки. Перед ними надо поставить знак «плюс» (как перед положительными числами), поскольку 106 равняется 100 плюс 6, а 104 – 100 плюс 4.



Складываем накрест. 106 плюс 4 равно 110. Запишем 110 после знака равенства. Умножим 110 на опорное число 100. Как умножить любое число на 100? Приписать к нему справа два нуля. Получаем промежуточный результат: 11000.

Теперь перемножим числа в кружках: 6 × 4 = 24. Приплюсуем результат к 11000 и получаем 11024.

Полностью решенный пример выглядит следующим образом:



**Для самостоятельного решения:**

**а)** $102×114$; **б)** 103$×112$; **в)** $112×112$; **г)** $102×123$

## **Задачи**

**1.** Коридор длины 6 м покрыт тремя трёхметровыми ковровыми дорожками, причём нигде дорожки не лежат в три слоя. Докажите, что какие-то две из них перекрываются не меньше, чем на 1,5 м.

*Решение:*Занумеруем дорожки слева направо. Закрасим все такие участки, где первая дорожка перекрывается со второй, а вторая с третьей. Суммарная длина таких перекрытий равна 3 м: три дорожки длины 9 м должны уместиться на коридоре длины 6 м.

Следовательно, какое-то из этих трёх перекрытий не меньше 1,5 м (а какое-то другое – не больше 1,5 м).

**2.**  Проведите 3 прямые так, чтобы тетрадный лист разделился на наибольшее число частей. Сколько получится частей? Проведите 4 прямые с тем же условием. Сколько теперь получилось частей?

*Решение*

**3**. Можно ли разрезать шахматную доску на прямоугольники размером 3х1?

*Решение.* Пусть шахматную доску 8х8 удалось разрезать на *п* прямоугольников размером 3х1, тогда сумма площадей всех многоугольников равна 3*п*=64, что неверно, т.к. *п* – целое число. Ответ. Нет.

**4.** У шахматной доски отпилили 2 поля: левое нижнее и правое верхнее. Можно ли покрыть такую шахматную доску «костями» домино размером 2х1?

*Решение*. Каждая кость домино накрывает одно черное и одно белое поле шахматной доски. От шахматной доски отпилили 2 черных поля. Следовательно, осталось на 2 белых больше и, покрыть доску костями домино нельзя.

**5**. Посередине участка квадратной формы устроена квадратная клумба. Площадь участка равна 100 м2. Сторона клумбы в 2 раза меньше стороны участка. Чему равна площадь клумбы?

*Решение.* Т.к. площадь квадрата 100м2, то его сторона равна 10 м, тогда сторона клумбы - 5 м , а ее площадь 25 м 2.

**Ответ: 25 м 2.**

**6**. Как разрезать прямоугольник со сторонами 4х9 на минимальное число частей, чтобы из них сложить равновеликий квадрат?

*Решение.* Поскольку площади прямоугольника и квадрата должны быть равны, то сторона квадрата 6. Поэтому откладываем по 6 на больших сторонах прямоугольника и делаем ступенчатый разрез, о котором можно догадаться, вспомнив о центральной симметрии прямоугольника.



**7**. Все треугольники, изображенные на рисунке, имеют равные стороны. Радиус каждой из окружностей равен 2 см. Окружности касаются друг друга и сторон квадрата. Чему равен периметр «звездочки», нарисованной жирной линией?



**Ответ:** 64 см

# **Занятие №8**

**Логические задачи – на движение**

## **Разминка – Устный счет –** **Комбинация методов**

Посмотрим на следующий пример:



Он может представлять определенные трудности, если мы не знаем, сколько будет 8 × 7. Можно пририсовать еще пару кружков под первыми, чтобы вычислить произведение 8 × 7. Пример теперь выглядит так:



Вычтем 8 из 93 путем отнимания 10 и прибавления 2. 93 минус 10 равно 83, плюс 2 – получаем 85. Умножаем на опорное число 100 и имеем промежуточный результат: 8500. Чтобы перемножить 8 на 7, используем нижний ряд чисел в кружках, то есть 2 и 3.

7 – 2 = 5 и 2 × 3 = 6

Ответ равен 56. Вот как теперь выглядит решение примера:



**Для самостоятельного решения:**

**а)** $42×94$; **б)** 93$×82$; **в)** $71×62$; **г)** $52×43$

## **Задачи**

**1.** Могут ли три человека преодолеть расстояние в 60 км за 3 часа, если у них в распоряжении имеется двухместный мотоцикл? Скорость мотоцикла 50 км/ч, скорость пешехода 5 км/ч.

*Решение*. 1 час : Два человека (А и В) едут на мотоцикле и проезжают 50 км, а третий человек (С) идёт пешком и проходит 5 км.

2 час: Человек (В) сходит с мотоцикла и идёт пешком. Он проходит 5 км. Человек (С) идёт пешком и проходит ещё 5 км. Человек (А) возвращается на 40 км и ждёт человека (С) там.

 3 час: Два человека (А и С) на мотоцикле добираются до пункта назначения. Человек (В) проходит ещё 5 км и оказывается в пункте назначения.

**Ответ. Могут**

**2**. Мотоциклист, велосипедист и пешеход движутся по шоссе в одну сторону с постоянными скоростями. Когда велосипедист поравнялся с пешеходом, мотоциклист отставал от них на 6 км. Когда мотоциклист догнал велосипедиста, пешеход отстал от них на 3 км. Какое было расстояние между пешеходом и велосипедистом, когда мотоциклист догнал пешехода?

***Решение.***

Изобразим упомянутые в условии ситуации:


Сразу видно, что третье расположение следовало первому и предшествовало второму. Рассмотрим движение мотоциклиста и велосипедиста относительно пешехода.

Сколько километров относительно пешехода проехал мотоциклист от первой до второй ситуации? 3+6=9 километров

Сколько километров относительно пешехода проехал велосипедист от первой до второй ситуации? 3 километра.

Во сколько раз скорость мотоциклиста относительно пешехода больше скорости велосипедиста относительно пешехода? 9/3=3 раза.

Сколько километров относительно пешехода проехал мотоциклист между первой и третьей ситуациями? 6 километров

Сколько километров относительно пешехода за это же время проедет велосипедист? Т.к. его относительная скорость втрое меньше, то 6/3=2 километра.

**Ответ:** 2 километра

3 Поезд шел из Москвы в Петербург без остановок со скоростью 120 км/ч. Другой поезд также без остановок шел ему навстречу из Петербурга в Москву со скоростью 80 км/ч. Вопрос: на каком расстоянии будут эти поезда за 1 час до их встречи?

**Ответ: за 1 час до встречи они будут на расстоянии 200 км (120+80)**

4 Мотоциклист, велосипедист и пешеход движутся по шоссе в одну сторону с постоянными скоростями. Когда велосипедист поравнялся с пешеходом, мотоциклист отставал от них на 12 км. Когда мотоциклист догнал велосипедиста, пешеход отстал от них на 7 км. Какое было расстояние между пешеходом и велосипедистом, когда мотоциклист догнал пешехода?

**Ответ:\_\_\_\_**

**5.** Поезд шел из Москвы в Петербург без остановок со скоростью 140 км/ч. Другой поезд также без остановок шел ему навстречу из Петербурга в Москву со скоростью 100 км/ч. Вопрос: на каком расстоянии будут эти поезда за 1.5 часа до их встречи?

**Ответ: \_\_\_\_\_\_\_\_**

**6.** Поезд шел из Москвы в Петербург без остановок со скоростью 100 км/ч. Другой поезд также без остановок шел ему навстречу из Петербурга в Москву со скоростью 60 км/ч. Вопрос: на каком расстоянии будут эти поезда за 20минут до их встречи?

**Ответ: \_\_\_\_\_\_\_\_**

# **Занятие №9**

**Логические задачи – на взвешивание**

## **Разминка – Устный счет Комбинация методов**

Посмотрим на следующий пример:



**Для самостоятельного решения:**

**а)** $41×97$; **б)** 63$×72$; **в)** $91×55$; **г)** $82×47$

## **Задачи**

**1.** Из девяти монет одна фальшивая: она легче остальных. Как за два взвешивания на чашечных весах без гирь определить, какая именно?

*Решение.* Разобьём монеты на 3 кучки по 3 монеты и проведём взвешивания.

Первое взвешивание: положим по 3 монеты на каждую чашку весов.

Возможны два случая:

1. Равновесие, тогда на весах только настоящие монеты, а фальшивая среди тех монет, которые не взвешивались.

2. Одна из кучек легче, то в ней фальшивая монета.

Второе взвешивание: теперь требуется найти фальшивую среди трёх монет( по методу первого взвешивания).

**2**. Известно, что монеты: 1к., 2к., 3к. и 5 к. весят, соответственно, 1, 2, 3 и 5 граммов. Среди четырёх монет (по одной каждого достоинства) одна фальшивая. Она отличается весом от настоящей. Как с помощью взвешиваний на чашечных весах без гирь определить фальшивую монету?

*Решение.* Чтобы узнать какая монета фальшивая выполним следующие взвешивания:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1 взвешивание  | 1 чашка: 1 к. + 2 к. | 2 чашка: 3 к. |
| 2 взвешивание | 1 чашка: 2 к. + 3 к. | 2 чашка: 5 к. |

Если при первом взвешивании будет равновесие, то бракованная монета – 5 к.

Если при втором, то бракованная монета – 1 к.

Если же равновесия не будет, то обе монеты, 1 к. и 5 к., - настоящие, а одна из монет, 2 коп или 3 коп, - бракованная.

Кроме того, из второго взвешивания можно будет сделать вывод легче или тяжелее настоящей фальшивая монета.

Если при первом взвешивании перевесит та же чашка весов, что и при втором, то фальшивая монета – 2 к., иначе 3к.

**3.** Имеется 10 мешков монет. В 9 мешках монеты настоящие (весят по 10г), а в одном фальшивые (весят по 11 г) Одним взвешиванием на электронных весах определить, в каком мешке фальшивые монеты?

*Решение*. Занумеруем мешки и возьмем из каждого мешка количество монет, соответствующее его номеру (из первого мешка 1 монету, из второго –2…)Всего мы возьмем 1+2+3+…+10=55 монет. Если бы все они были настоящие, то их общая масса составила 550г, но среди них есть и фальшивые, поэтому эта масса будет больше. Если фальшивые монеты в 1 ящике, то разница в массе составит 1 г., а если во втором- 2 г. и т.д. Определив **эту разницу**, мы и узнаем в каком мешке фальшивые монеты.

4. Имеется 20 мешков монет. В 12 мешках монеты настоящие (весят по 10г), а в одном фальшивые (весят по 11 г) Одним взвешиванием на электронных весах определить, в каком мешке фальшивые монеты?

5. Имеется 5 мешков монет. В 2 мешках монеты настоящие (весят по 5г), а в одном фальшивые (весят по 6 г) Одним взвешиванием на электронных весах определить, в каком мешке фальшивые монеты?

6. Из десяти монет одна фальшивая: она легче остальных. Как за три взвешивания на чашечных весах без гирь определить, какая именно?

# **Занятие №10**

**Логические задачи – на принцип Дирихле**

## **Разминка – Устный счет – Перемножение чисел над и под опорным числом**

Как перемножать числа, одно из которых находится выше опорного, а другое – ниже?

Посмотрим, как поступать, на примере произведения 96 × 135. В качестве опорного числа будем использовать 100:



98 меньше опорного числа 100, поэтому кружок рисуем под ним. На сколько меньше? На 2, значит, вписываем в кружок цифру 2. 135 больше 100, поэтому рисуем кружок над 135. На сколько больше? На 35, следовательно, вписываем в кружок 35.



135 равняется 100 плюс 35, поэтому ставим знак «плюс» перед 35. 98 – это 100 минус 2, значит, перед 2 в кружке надо поставить минус. Теперь вычисляем накрест. Берем либо 98 плюс 35, либо 135 минус 2. 135 минус 2 равно 133. Записываем 133 после знака равенства. Теперь умножим 133 на опорное число 100. 133 на 100 равняется 13300. (Чтобы умножить на 100 любое число, достаточно дописать к нему справа два нуля.) Вот так теперь выглядит решение примера:



Теперь перемножим числа в кружках. 2 на 35 дает 70. Правда, это не совсем так. На самом деле нам необходимо перемножить 35 и минус 2. В ответе, соответственно, будет минус 70. Теперь решение примера выглядит следующим образом:



Чтобы отнять 70 от 13300 используем метод быстрого вычитания (см. Приложение 3).

Вычитаем сначала 100, а затем прибавляем 30.

13300 минус 100. 13200. Плюс 30. 13230. Вот как теперь выглядит полностью решенный пример:



**Для самостоятельного решения:**

**а)** $98×145$; **б)** $97×125$; **в)** $95×120$; **г)** $96×127$

## **Задачи**

**1.** Пятнадцать мальчиков собрали вместе 100 орехов. Докажите, что какие-то двое из них собрали одинаковое количество орехов.

***Решение*:** Предположим противное – тогда мальчики собрали не меньше, чем 0 + 1 + 2 +  …  + 14 = 105 орехов. Противоречие.

**2.** Верно ли, что среди любых 34 разных натуральных чисел, не превосходящих 50, всегда можно выбрать два числа, одно из которых вдвое больше другого?

***Решение*:** Да, верно. Разобьем числа на такие пары-клетки: (1,2), (3,6), (5,10), …, (25,50); (4,8), (12,24), (20,40); (16,32). Добавим к этим 17-ти парам ещё не использованные 16 чисел, не превосходящих 50 (27, 28, 29, 31, 33, 35, 36, 37, 39, 41, 43, 44, 45, 47, 48, 49), каждое из них образует отдельную клетку. Всего получилось 33 клетки, поэтому в одну из них попадут хотя бы два данных числа. В «одноместную» клетку они попасть не могут, значит, они попали в пару, так что одно из них действительно в два раза больше другого.

3. В магазин привезли 25 ящиков с тремя разными сортами яблок (в каждом ящике яблоки только одного сорта). Докажите, что среди них есть по крайней мере 9 ящиков с яблоками одного и того же сорта.

***Решение*:** Предположим, что ящиков с конфетами каждого из трёх сортов привезли не более восьми, тогда всего привезли бы 8 · 3 = 24 ящика. Это противоречит условию задачи. Значит, найдутся 9 ящиков с одинаковым сортом конфет.

**4.** 10 школьников на олимпиаде решили 35 задач, причем известно, что среди них есть школьники, решившие ровно одну задачу, школьники, решившие ровно две задачи и школьники, решившие ровно три задачи. Докажите, что есть школьник, решивший не менее пяти задач.

*Решение:* Из условий следует, что найдутся 7 школьников, решивших 35 – 6 = 29 задач. Так как 29 = 4 • 7 + 1, то найдется школьник, решивший не менее пяти задач.

**5.** Пятеро молодых рабочих получили на всех зарплату – 1500 рублей. Каждый из них хочет купить себе магнитофон ценой 320 рублей. Докажите, что кому-то из них придется подождать с покупкой до следующей зарплаты.

*Решение:* Если бы каждый из рабочих мог купить магнитофон, то у них в сумме было бы не менее 5 • 320 = 1600 рублей.

**6.** Сто человек сидят за круглым столом, причем более половины из них – мужчины. Докажите, что какие-то два мужчины сидят друг напротив друга.

*Решение:* Разобьем всех людей на 50 пар так, что в каждой паре – два человека, сидящих друг напротив друга. Ясно, что в одной из этих пар-«клеток» оба человека – мужчины.

7. В городе 15 школ. В них обучается 6015 школьников. В концертном зале городского дворца культуры 400 мест. Доказать, что найдётся школа, ученики которой не поместятся в этот зал.

*Решение:* Предположим, что в каждой школе не более 400 учеников. Значит, в 15 школах не более 15 · 400 = 6000 школьников. Но по условию в школах обучаются 6015 человек. Значит, найдется школа, в которой больше 400 учеников. Поэтому ученики этой школы не поместятся в зал на 400 мест.

# **Занятие №11**

**Логические задачи – на взаимно однозначное соответствие**

## **Разминка – Устный счет – Произведение чисел в кружках**

Правило, согласно которому находят произведение чисел в кружках, звучит так:

Если оба кружка находятся над или под множителями, то мы прибавляем их произведение к промежуточному результату. Когда один из кружков располагается над множителями, а другой – под ними, мы вычитаем произведение чисел в кружках из промежуточного результата.

Говоря математическим языком, когда мы перемножаем два положительных (с плюсом) числа, то получаем положительное (с плюсом) число в ответе. Когда перемножаем два отрицательных (с минусом) числа, мы также получаем положительное (с плюсом) число. Когда же умножаем положительное (с плюсом) число на отрицательное (с минусом), мы получаем отрицательное (с минусом) число.

Рассмотрим пример 8х45

Попробуем проверить. Возьмем в качестве опорного число 10. 8 меньше 10 на 2, а 45 – на 35 больше.



Отнимаем 2 от 45 или прибавляем 35 к 8. 45 минус 2 дает 43; умножаем на опорное число 10, получаем 430. Минус 2, умноженное на 35, дает 70. Чтобы вычесть 70 из 430, отнимаем сначала 100, что даст нам 330, и прибавляем 30, получив в итоге 360.



**Для самостоятельного решения:**

**а)** $4×57$; **б)** 6$×72$; **в)** $9×55$; **г)** $8×47$

## **Задачи**

**1.** В кругу стоят девочки: Ася, Катя, Галя и Нина, одетые в зелёное, голубое, белое, розовое платья. Девочка в зелёном платье (не Ася и не Катя) стоит между девочкой в голубом платье и Ниной. Девочка в белом платье стоит между девочкой в розовом платье и Катей. Какого цвета платье было надето на каждой из девочек?

*Решение*.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Зелёное  | Голубое | Белое  | Розовое  |
| Ася | - | - | + | - |
| Катя | - | + | - | - |
| Галя | + | - | - | - |
| Нина | - | - | - | + |

Ответ: Галя – в зелёном, Катя – в голубом, Ася – в белом, Нина – в розовом.

**2.** Учащиеся школы решили организовать инструментальный ансамбль. Михаил играет на саксофоне. Пианист учится в 9 классе. Ударника зовут не Валерием, а ученика 10 класса зовут не Леонидом. Михаил учится не в 11 классе. Андрей – не пианист и не ученик 8 класса. Валерий учится не в 9 классе, ударник - не в 11. Леонид играет не на контрабасе. На каком инструменте играет Валерий и в каком классе он учится?

*Решение*.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Михаил | Валерий | Леонид | Андрей |
| саксофон | + | - | - | - |
| пианино | - | - | + | - |
| ударные | - | - | - | + |
| контрабас | - | + | - | - |

Валерий играет на контрабасе. Для того, чтобы определить в каком он классе составим ещё одну таблицу.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Михаил | Валерий | Леонид | Андрей |
| 8 класс | + | - | - | - |
| 9 класс | - | - | + | - |
| 10 класс | - | - | - | + |
| 11 класс | - | + | - | - |

**Ответ.** Валерий играет на контрабасе и учится в 11 классе.

**3.** В семье 4 ребенка. Младшему 5, старшему 15 лет. Двум другим 8 и 13 лет.
Имена детей: Боря, Галя, Вера и Аня. Какой возраст каждого ребенка, если одна девочка ходит в детский сад. Аня старше Бори. Сумма лет Ани и Веры делится на 3.

*Решение*.

|  |  |
| --- | --- |
| Утверждение | Вывод(цифры указывают возраст) |
| Ане | Боре | Вере | Гале |
| Младшая в семье- девочка |  | 8,13 или 15 |  |  |
| Аня старше Бори | 13 или 15 |  |  |  |
| Если к 15 + 13,8 или 5, то не получится число, которое делится на 3. | 13 |  |  |  |
| Аня старше Бори |  | 8 |  |  |
| Сумма лет Ани и Веры делится на 3 |  |  | 5 |  |
| Для Гали- единственная возможность |  |  |  | 15 |

**Ответ:** Аня 13, Боря 8, Вера 5, Галя 15

**4.** Катя, Соня, Галя и Тамара родились 2 марта, 17 мая, 2 июля и 20 марта. Соня и Галя родились в одном месяце, а дни рождения Гали и Кати обозначаются одинаковыми числами. Назовите дату рождения каждой девочки.

**5.** Наташа, Валя, Маша, Галя и Лена вырезали из бумаги разные фигуры. Кто-то вырезал круг из бумаги в клетку, кто-то круг из бумаги в линейку, кто-то квадрат из бумаги в клетку, кто-то квадрат из бумаги в линейку, а кто-то флажок из белой бумаги. Галя и Валя вырезали круги. Галя и Наташа вырезали из бумаги в клетку. Наташа и Маша вырезали квадраты. Кто что вырезал?

**6.** Маша, Саша, Даша, Валя и Катя рисовали цветы. Они нарисовали синий колокольчик, красный тюльпан, желтый тюльпан, красную гвоздику и желтый нарцисс. Маша и Саша рисовали одинаковые цветы, а Саша и Катя раскрашивали свои цветы одним фломастером. Желтыми были цветы Маши и Вали. Что нарисовала каждая из девочек?

**7.** Аня, Вера и Лиза живут на разных этажах трехэтажного дома. На каком этаже живет каждая из девочек, если известно, что Аня живет не на втором этаже, а Вера — не на втором и не на третьем?

**8.** В пассажирском поезде Петербург-Москва едут пассажиры. Сидоров, Петров и Иванов. У машиниста, электрика и кондуктора такие же фамилии.

Подсказки:

- В Москве живет Иванов

- Пассажир, однофамилец кондуктора, живет в Питере

- Кондуктор живет на половине пути от Питера до Москвы

- Пассажир, который ближе к месту жительства кондуктора, чем другие пассажиры - в три раза старше кондуктора

 20 лет в тот день исполнилось пассажиру Петрову

- У электрика Сидоров (из бригады) выиграл в биллиард

Какая фамилия у машиниста? **Ответ: Сидоров**

**9.** В банке работают: заведующий, контролер и кассир. Их имена: Борис, Иван, Саша.

У кассира нет братьев, сестер и он меньше всех ростом. Саша женат на сестре Бориса и ростом выше контролера.

Какое имя у кассира, контролера и заведующего?

**Ответ**: Иван - кассир, Саша - заведующий, Борис – контролер

# **Занятие №12**

**Логические задачи – на круги Эйлера**

## **Разминка –** **Устный счет – Проверка ответов “Числа-подстановки”**

Чтобы проверить, верный ли получен ответ, мы используем числа подстановки вместо тех, которые задействованы в примере. Запасные в футбольной или баскетбольной команде служат для подмены игроков во время матча. Нечто подобное мы будем делать и с числами, найдя для них подходящих «запасных». Последние помогут нам проверить, к правильному ли ответу мы пришли с основными числами в задаче.

Рассмотрим это на примере. Допустим, что вы только что перемножили 13 и 14 и получили 182. Надо проверить, правильный ли это ответ.



Сначала у нас идет число 13. Найдем сумму его цифр и получим первую подстановку:

1+3=4

4 становится подстановкой для 13.

Следующим числом идет 14. Найдем и ему подстановку, для чего сложим его цифры:

1+4=5

5 служит подстановкой для 14.

Теперь выполним умножение, используя вместо исходных чисел подстановки:

4х5=20

20 – это опять двузначное число, поэтому сложим и его цифры и получим наше контрольное число, которое поможет нам определить правильность ответа:

2х0=2

**2 – это контрольное число, служащее для определения правильности ответа.**

Если мы верно решили исходный пример, тогда сумма цифр ответа должна совпасть с контрольным числом.

Складываем цифры исходного полученного ответа:

1+8+2=11

11 – это двузначное число, а нам нужно однозначное, поэтому сложим и его цифры:

1+1=2

**2 – это тоже число подстановка, но на этот раз для проверяемого ответа. Поскольку оно совпало с контрольным числом, пример решен правильно**.

## **Задачи**

**1**. На спортивные соревнования в ЛМШ ходили 220 школьников. При этом некоторые из них участвовали в чемпионатах, а остальные были зрителями. В легкоатлетической эстафете приняли участие 30 человек, в соревнованиях по волейболу – 26, пионерболу – 32, футболу – 31, шахматам – 28 и теннису – 36 человек. 53 школьника приняли участие более чем в одном соревновании; из них 24 школьника участвовали 3 или более раз, 9 школьников – не менее 4 раз и 3 школьника – даже 5 раз (в последнюю тройку входит и один чудак, который выступал во всех шести соревнованиях). Сколько из школьников были зрителями?

***Решение:*** В сумме в них были 30 + 26 + 32 + 31 + 28 + 36 = 183 школьника. Число школьников, игравших хотя бы один раз, равно 183 – 53 – 24 – 9 – 3 – 1 = 93. Оставшиеся 127 школьников были зрителями.

**Ответ: 127**

2. Из 100 туристов, отправляющихся в заграничное путешествие, немецким языком владеют 30 человек, английским – 28, французским – 42. Английским и немецким одновременно владеют 8 человек, английским и французским – 10, немецким и французским – 5, всеми тремя языками – 3. Сколько туристов не владеют ни одним языком?

***Решение:*** только английским владеет 13 человек, только французским – 30, только немецким – 20 человек. 20 человек не знают ни одного из этих языков.

# **Занятие №13**

**Логические задачи – комбинаторные задачи**

## **Разминка – Устный счет – Проверка ответов “Выбрасывание девяток”**

Есть способ, который позволяет еще больше сократить по времени данную процедуру. Когда бы нам ни встречалось число 9 в наших вычислениях в ходе проверки, можно смело его вычеркивать.

В предыдущем примере получен ответ – 182.

Мы складывали 1 + 2 + 8, получили 11, а затем сложили 1 + 1 и получили контрольное число 2. В числе 182 две цифры дают в сумме 9: 1 и 8. Просто вычеркните их, и в результате у вас получится требуемое число 2. И делать ничего не надо.

Решим еще один пример, чтобы посмотреть, как работает метод:



С первым числом никакого фокуса не получилось. 5 является подстановкой для 167.

3 + 4 + 6 =

Сразу замечаем, что 3 + 6 = 9, поэтому вычеркиваем 3 и 6, как будто их и не было. Остается 4, которое является подстановкой для числа 346.

Имеются ли девятки или цифры, дающие в сумме 9, в ответе примера, который мы, собственно, и проверяем?

Да, есть: 7 + 2 = 9, поэтому вычеркиваем эти цифры. Остальные складываем: 5 + 7 + 8 = 20. Затем 2 + 0 = 2. Это число, служащее подстановкой для ответа.



Перемножаем числа подстановки: 5 на 4 дает 20. Сумма цифр в числе 20 равна 2 (2 + 0 = 2). Мы получили число, равное контрольному, поэтому ответ является верным.

## **Задачи**

**1**. Государственные флаги многих стран состоят из горизонтальных или вертикальных полос разных цветов. Сколько существует различных флагов, состоящих из двух горизонтальных полос одинаковой ширины и разного цвета, при этом используются цвета — белый, красный и синий.
*Решение*. Пусть верхняя полоска флага белая (Б). Тогда нижняя полоса может быть красной (К) или синей (С). Получили две комбинации — два варианта флага. Если верхняя полоса флага — красная, то нижняя может быть белой или синей. Получим еще два варианта флага. Пусть, наконец, верхняя полоса — синяя, тогда нижняя может быть белой или красной. Это еще два варианта флага. Всего получили 3∙2 = 6 комбинаций — шесть вариантов флагов.



**2**. Сколько трехзначных цифр можно составить из цифр «1», «3», «5», «7», используя в записи числа каждую цифру не более одного раза?
*Решение*.*Способ I.* Чтобы ответить на этот вопрос, выпишем все такие числа. Пусть на первом месте стоит «1». На втором месте может быть записана любая из цифр «3», «5», «7». Запишем, например, на втором месте цифру «3». Тогда в качестве третьей цифры можно взять «5» или «7». Получим два числа 135 и 137. Если на втором месте написать цифру «5», то в качестве третьей цифры можно взять цифру «3» или «7». В этом случае получим числа 153 и 157. Если же, наконец, на втором месте записать цифру «7», то получим числа 173 и 175. Итак, мы составили все числа, которые начинаются с «1». Таких чисел шесть: 135, 137, 153, 157, 173, 175. Аналогичным способом можно составить числа, которые начинаются с цифры «3», с цифры «5», с цифры «7». Полученные результаты запишем в четыре строки, в каждой из которых шесть чисел:



Таким образом, из цифр «1», «3», «5», «7» (без повторения цифр) можно составить 24 трехзначных числа.

*Способ II*. Проиллюстрируем проведенный перебор вариантов на так называемом дереве возможных вариантов (см. дерево «А»).

Способ III. Ответ на вопрос, поставленный в задаче, можно получить, не выписывая сами числа, а рассуждая так. Первую цифру можно выбрать 4 способами. Так как после выбора первой цифры останется 3, то вторую цифру можно выбрать уже 3 способами. Наконец, третью цифру можно выбрать (из оставшихся двух) 2 способами. Следовательно, общее число искомых трехзначных чисел равно произведению 4∙3∙2, то есть 24. Ответ на поставленный в задаче вопрос мы нашли, используя комбинаторное правило умножения



**3**. Из города A в город B ведут две дороги, из города B в город C — три дороги, из города C до пристани — две дороги. Туристы хотят проехать из города A через города B и C к пристани. Сколькими способами они могут выбрать маршрут?



*Решение*. Путь из A в B туристы могут выбрать двумя способами. Далее, в каждом случае они могут проехать из B в C тремя способами. Значит, имеются 2∙3 вариантов маршрута из A в C. Так как из города C на пристань можно попасть двумя способами, то всего существует 2∙3∙2, то есть 12 способов выбора туристами маршрута из города A к пристани.



**4**. Сколько существует флагов, составленных из трех горизонтальных полос одинаковой ширины и различных цветов — белого, зеленого, красного и синего? Есть ли среди них флаг Российской Федерации?

6

*Решение* (см. дерево «Б»). Таким образом, 4∙3∙2 = 24 флага.

**Ответ***:* 24; да.

**5** Сколько различных трехзначных чисел, кратных 5, можно составить из нечетных цифр, если цифры в записи не повторяются?

Прежде чем решать эту задачу, давайте повторим, какие цифры называются «нечетными». Какие числа являются кратными 5.

Решив задачу, проверьте ответ, вставив пропущенные числа.



*Решение*. Нечетные цифры: «1», «3», «5», «7», «9». В данном случае, чтобы число было кратным 5, оно должно оканчиваться на 5. Составим дерево возможных вариантов (см. дерево «В»).

Таким образом, 4∙3∙1 = 12 чисел.

**Ответ**: 12.

**6** В школьной столовой предлагают 2 первых блюда: борщ, харчо, и 4 вторых блюда: пельмени, котлеты, гуляш, рыба. Сколько обедов из двух блюд могут заказать посетители? Перечислите их.

*Решение*. 1-е блюдо: Б, Х — 2 возможности.

2-е блюдо: П, К, Г, Р — 4 возможности. Таким образом, 2∙4 = 8 различных блюд.

**Ответ**: 12.

# **Занятие №14**

**Логические задачи – математические игры**

## **Разминка – Устный счет –** **Умножение по множителям**

Легко умножать на 20, поскольку 20 равно 2 × 10, на которые умножать очень легко. Речь идет об умножении по множителям, а 10 и 2 являются множителями числа 20.

10х2=20

Рассмотрим пример:

23х24

23 и 24 больше, чем опорное число 20, поэтому рисуем кружки над множителями. Больше, но на сколько? На 3 и 4 соответственно. Вписываем эти числа в соответствующие кружки, которые мы нарисовали вверху, потому что речь идет о положительных числах (23 = 20 + 3, 24 = 20 + 4).



Складываем накрест, как раньше:

23 + 4 = 27 или 24 + 3 = 27

Теперь умножим полученный ответ на опорное число 20.

Для этого умножим сначала на 2, а потом на 10:

27 × 2 = 54

54 × 10 = 540

(Позднее в этой же главе мы рассмотрим простой способ умножения 27 на 2.) В остальном все то же самое. Перемножаем числа в кружках и прибавляем к промежуточному результату 540.

3 × 4 = 12

540 + 12 = 552

Полностью решенный пример выглядит так:



Проверка ответа:

23 × 24 = 552

5612

3

Числами подстановками для 23 и 24 будут 5 и 6 соответственно.

5 × 6 = 30

3 + 0 = 3

**3 – это наше контрольное число**.

Цифры исходного ответа (552) дают в сумме 3:

5 + 5 + 2 = 12

1 + 2 = 3

Полученное число равно контрольному, значит, ответ мы получили верный.

## **Задачи**

**1.** В двух кучках лежат предметы, по 100 предметов в каждой. За ход разрешается взять произвольное количество предметов, но только из одной кучки. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход. Найдите выигрышную стратегию для второго игрока.

*Решение***:** Второму игроку достаточно повторять ходы первого, но только в другой кучке. Таким образом, только после ходов второго в количество предметов в кучках становится равным, следовательно, ситуация, когда в обеих кучках не останется ни одного предмета, также может наступить только после хода второго, а, значит, он не проиграет. Поскольку с каждым ходом количество предметов в кучках уменьшается, игра закончится, и так как второй не проиграет – он выиграет.

**2.** У ромашки а) 12 лепестков; б) 11 лепестков. За ход разрешается оторвать либо один лепесток, либо два рядом растущих лепестка. Проигрывает тот, кто не может сделать хода.

*Решение:*В обоих случаях выигрывает второй. Своим первым ходом он разбивает лепестки на две одинаковых группы, а дальше действовать симметрично.

**3.** Волк и Заяц играют в следующую игру: на доске написано некоторое натуральное число с ненулевой последней цифрой. Ход состоит в том, что из числа вычитают какую-нибудь его ненулевую цифру и пишут результат вместо старого числа. Выигрывает тот, кто первым получит нуль.

*Решение:*Первый игрок постоянно вычитает из числа его последнюю (ненулевую!) цифру.

**4.** Имеется две кучи конфет: в первой – 40, во второй – 45. За ход нужно одну кучу съесть, а другую разделить на две (не обязательно равные). Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

*Решение***:** В этой игре выигрывает первый игрок. Он всегда съедает нечётную кучку, а чётную делит на две нечётных – в результате после его хода оказываются две нечётных кучки, а после хода второго – снова одна нечётная и одна чётная кучка. Единственная позиция, в которой невозможно сделать ход – позиция (1,1), которая могла получиться только после хода первого игрока.

**5**. Круг разделили на 6 секторов, в каждом лежит селедка. За ход можно одну селедку передвинуть в соседний сектор. Можно ли собрать все селедки ровно за 20 ходов?

*Решение.* Предположим, что нужно собрать все селедки в 1 секторе, тогда селедку второго сектора можно передвинуть или 1 или 5 ходами; из третьего сектора – или 2 или 4 ходами; из пятого сектора – 2 или 4 ходами; из четвертого сектора - 3 ходами; из шестого – 1 или 5 ходами. В любом случае количество ходов будет нечетным, значит, **за 20 ходов собрать селедки нельзя.**

6 Охотник встретил двоих пастухов. У одного пастуха было три куска хлеба, у второго - пять кусков. Все куски хлеба одинакового размера.
Все трое разделили и съели весь хлеб поровну. Охотник дал пастухам после еды 8 монет на двоих. Как пастухи разделили эти деньги?

Ответ: Первый получил 1 монету. Второй 7. Объяснение: каждый съел по 2 и 2/3 куска хлеба. Поэтому первый пастух дал охотнику только 1/3 куска, а второй еще 2 и 1/3 куска.

# **Занятие №15**

**Логические задачи – разные**

## **Разминка – Умножение по множителям**

Решим один пример:

23 × 31 =

Пишем 3 и 11 в кружках над 23 и 31, поскольку наши множители больше опорного числа 20 на 3 и 11 соответственно



Складывая накрест, получаем 34:

31 + 3 = 34 или 23 + 11 = 34

Умножаем полученный ответ на опорное число 20. Для этого сначала умножим 34 на 2, а то, что получится, – на 10.

34 × 2 = 68

68 × 10 = 680

Это наш промежуточный ответ. Теперь перемножаем числа в кружках:

3 × 11 = 33

Прибавим 33 к 680:

680 + 33 = 713

Полностью решенный пример выглядит следующим образом:



Проверку ответа осуществляем с помощью выбрасывания девяток.

23 × 31 = 713

5411

2

Перемножим числа подстановки, а затем суммируем цифры ответа:

5 × 4 = 20

2 + 0 = 2

Это совпадает с нашим контрольным числом, поэтому 713 можно считать верным ответом.

## **Задачи**

**1.** В токарном цехе завода вытачиваются детали из металлических заготовок. Из одной заготовки вытачивают одну деталь. Стружку, которая остается при изготовлении шести деталей, можно переплавить и приготовить еще одну заготовку. Сколько деталей можно сделать таким образом из 36 металлических заготовок?

*Решение.* Из 36 заготовок - 36 деталей. Так как стружка из каждых 6 деталей дает еще одну заготовку, то получаем из стружек 36 деталей еще 6 заготовок. Это еще 6 деталей. 36+6=42 детали. Но можно забыть, что от 6 последних заготовок остается стружка на еще одну деталь. Итого 36+6+1=43 детали.

**2.** На озере расцвела одна лилия. Каждый день число ее цветков удваивалось, а на 20-й день всё озеро покрылось цветами. На который день покрылась цветами половина озера?

***Решение*:** Начнём с конца. Пусть сегодня половина озера покрылась цветами. Через сколько дней покроется всё озеро? Завтра! И это будет 20-й день.

Ответ: за 19 дней.

**3.** Ваня, Петя, Катя и Олег вместе съели 70 бананов. Причем каждому сколько-то досталось. Ваня съел больше всех. Катя и Петя вместе съели 45 бананов. Сколько бананов досталось Олегу?

*Решение*: Катя и Петя съели 45 бананов, кто-то из них съел не меньше 23 бананов. Значит, Ваня съел не менее 24 бананов. Петя, Катя и Ваня вместе съели не менее 69 бананов. Но раз Олегу тоже что-то досталось, то Катя, Петя и Ваня съели 69 бананов. А значит Олег 1 банан.

**4.** Пассажир проехал половину пути и лег спать и спал до тех пор, пока не осталось ехать половину того пути, который он проехал спящим. Какую часть всего пути пассажир спал?

***Ответ***: Спал пассажир на протяжении двух третей от половину всего пути, то есть на продолжении одной трети всего пути.

**5**. От Нижнего Новгорода до Астрахани теплоход идет 5 суток, а обратно 7 суток. Сколько времени будут плыть плоты от Нижнего Новгорода до Астрахани.

*Решение.* Когда теплоход идет от Нижнего Новгорода до Астрахани ( по течению реки), за сутки он проходит 1/5 пути, а когда обратно- 1/7 пути. Поэтому 1/5-1/7=2/35- «2 скорости течения», откуда 1/35 часть пути в сутки- скорость течения. Следовательно, плоты будут плыть от Нижнего до Астрахани 35 суток.

**6.** Гриша с папой пошли в тир. Уговор был такой: Гриша делает 5 выстрелов и за каждое попадание в цель получает право сделать еще 2 выстрела. Всего Гриша сделал 17 выстрелов. Сколько раз он попал в цель.

*Решение.* Гриша сделал на 12 выстрелов больше, чем первоначальные 5 по уговору, значит, он попал в цель 6 раз, т.к. именно за 6 попаданий полагается 12 лишних выстрелов.

# **Занятие №16**

**Логические задачи – разные (продолжение)**

## **Задачи**

**1.** На день рождения Малыша Фрекен Бок испекла торт. Малыш и торт весили столько же, сколько Карлсон и Фрекен Бок. Когда торт съели, Карлсон весил столько же, сколько Фрекен Бок и Малыш. Докажите, что Карлсон съел кусок торта, весивший столько же, сколько Фрекен Бок до дня рождения.

*Решение.* М – Малыш, Б - Фрекен Бок, Т- торт, К - Карлсон , Тк – кусок торта, который съел Карлсон, Тб - кусок торта, который съела Фрекен Бок, Тм - кусок торта, который съел Малыш.

Т + М = К + Б.

Тк + Тм + Тм + М = К + Б.

К + Тк = Б + Тб + М + Тм.

Прибавим к обеим частям этого равенства Тк, получаем: К + 2Тк = Б + М + Т. Так ка М + Т = К + Б , то К + 2Тк + 2Б + К, 2Тк = 2Б, **Тк = Б.**

**2.** В пруду растет 1 лист лилии. К вечеру каждого дня число листьев удваивается. На какой день пруд будет покрыт листьями наполовину, если полностью он будет покрыт лилиями через 100 дней?

**Ответ:** через 99 дней

**3** На конференцию в Мадагаскаре приехали 10 делегатов. Они не понимают языки друг друга. Какое минимальное число переводчиков понадобится для обслуживания этой конференции, если известно, что каждый  переводчик знает только два языка.

**Ответ:** 9

**4** Во дворе дети катались на велосипедах. Самые маленькие на 3-хколесных. Школьники на 2-хколесных. Миша сосчитал, что у всех велосипедов было 12 колес. Сколько на 3-х и 2-х колесных велосипедов было на улице?

**Ответ**: два трехколесных и три двухколесных

**5**. Две мухи между собой соревнуются. Они бегут от пола к потолку, а затем обратно. Первая муха бежит и вверх и вниз с одинаковой скоростью.

Вторая муха бежит вниз вдвое быстрее, чем первая. А вверх она бежит вдвое медленнее. Какая из мух победит?

 **Ответ: первая.** Чтобы решить эту задачку нужно нарисовать первый этап. Первая муха достигнет потолка, а вторая будет только на половине пути к потолку. И первая уже достигнет пола, когда вторая только достигнет потолка.

**6** В пакетике находятся конфеты трех разных сортов. На ощупь они одинаковые. Вопрос: какое минимальное число конфет надо взять наугад из пакетика, чтобы среди взятых конфет были хотя бы

а) две конфеты одного сорта;

б) три конфеты одного сорта.

**Ответ:** а)4 б)7

# **Занятие №17**

**Задачи с подвохом**

## **Задачи**

**1.** Как может куриное яйцо, которое бросили, пролететь два метра и не разбиться?

 **Ответ:** яйцо подкинули больше чем на два метра, поэтому оно разобьется не когда пролетит 2 метра, а когда упадет на землю.

**2.** Три ласточки вылетели из гнезда. Какова вероятность того, что через 10 секунд они будут находиться в одной плоскости?

 **Ответ:** 100%. Потому что три точки всегда образуют одну плоскость.

**3.** Шесть кошек ловят шесть мышей за шесть минут. Сколько времени нужно одной кошке для ловли одной мышки.

Ответ: шесть минут

**4.** Двое подошли к реке. У берега реки стоит одна лодка. На лодке можешь переправиться только один человек. Как этим двум удалось переправиться на другой берег без посторонней помощи?

**Ответ:** Они находились на разных берегах реки.

**5.** У треугольника стороны равны 13, 18 и 31 сантиметр. Чему же равна площадь этого треугольника?

**Ответ.** Площадь этого треугольника равна 0. Т.к. такого треугольника не существует, получается линия (сумма двух любых сторон в треугольнике всегда больше длины третей)

**6.** Как то солдат в Древнем Риме, который был в карауле, подошел к центуриону и сказал, что этой ночью видел сон, в котором варвары нападали на крепость с юга.

Центурион в это особо не поверил, но меры принял. Тем же вечером варвары действительно напали на крепость с юга и их атака была отбита.

После сражения центурион поблагодарил солдата за предупреждение, а затем взял его под стражу. За что был взят солдат под стражу?

**Ответ:** солдат видел сон, а значит он спал во время караула. В это время он был обязан не спать.

**7.** На столе стоит 6 стаканов. Первые три полный, вторые три пустые.

Как сделать, чтобы полные стаканы и пустые чередовались между собой?

При этом трогать можно только один стакан.

**Ответ**: Нужно взять второй стакан и перелить его содержимое в пятый.

# **Занятие №18**

**Логические задачи – на множества.**

## **Задачи**

**1.** Юра купит билет раньше, чем Миша, но позже Олега. Володя и Олег не стоят рядом. Саша не находится рядом ни Олегом, ни с Юрой, ни с Володей.

Кто за кем стоит?

Решение. По условию задачи в очереди за билетами три мальчика стоят в порядке: Олег, Юра и Миша.

——Олег———Юра———Миша———

Поэтому нужно установить места в очереди для Саши я Володи.

Но Саша не находится рядом ни с Олегом, ни с Юрой, ни с Володей. Это возможно лишь в случае, когда Саша стоит с Мишей, а остальные мальчики стоят перед Мишей. Теперь нужно установить место Володи в очереди. По условию задачи Володя не стоит рядом ни с Олегом, ни с Сашей. Значит, Володя стоит между Юрой и Мишей.

——Олег———Юра———Володя——Миша———Саша———

2. 3 белые и 2 черные шляпы. Как-то три учителя на практикуме решили продемонстрировать ученикам свое умение размышлять. Они взяли 5 шляп (если кто-то не может представить древнегреческих учителей в шляпах, пусть представит их в разноцветных венках или повязках на голове) - 3 белые и 2 черные - и попросили одного из учеников надеть каждому из них по шляпе.

Ученик мог выбрать каждому произвольный цвет шляпы и надеть ее так, чтобы ни один мудрец не видел цвет своей шляпы. Ученик надел каждому по белой шляпе, решив, что так сделает выбор учителей труднее. Учителя договорились о том, что, если кто-либо из них догадается, какого цвета у него шляпа, он сразу же должен заявить об этом. Вскоре один из них догадался, что у него белая шляпа.

а) Как он рассуждал?

б) Действительно ли ученик выбрал для мудрецов самый трудный вариант?

*Решение:*

а) Пусть первым догадался мудрец А.

Он мог рассуждать следующим образом: «Предположим, что у меня шляпа черная. Тогда Б видит мою черную шляпу и белую шляпу В и думает, какого цвета его шляпа. «Если бы моя (Б) шляпа была черной, то В, видя 2 черные шляпы, сразу же заявил бы о белом цвете своей шляпы». Однако В молчит.

Следовательно, Б должен сделать вывод о том, что его шляпа не черная, а белая, и заявить об этом. Однако и Б молчит. Следовательно, мое исходное предположение о том, что у меня шляпа черная, ложно. Таким образом, у меня шляпа белая».

б) Если у одного мудреца, например Б, черная шляпа, то А, предположив, что и у него шляпа тоже черная, ожидал бы, что В сразу же догадается, что у него белая шляпа, так как черных шляпы всего 2. Следовательно еще быстрее догадался бы о цвете своей шляпы, чем в случае, когда у всех белые шляпы.

Если же у двух мудрецов черные шляпы, а у третьего белая, то он моментально об этом догадался бы.

**3.** Построение в ряд. В другой раз учителя решили провести иную практическую демонстрацию умения рассуждать. Они стали в ряд (в затылок друг другу) так, что лишь последний в ряду по-прежнему видел шляпы двух других, средний видел только шляпу переднего. Первый в ряду не видел ни одной шляпы. Учителя, догадавшиеся о цвете своей шляпы, должны были немедленно и громогласно заявить об этом.

Ученик опять выбрал самый трудный для учителей вариант и надел каждому по белой шляпе, и вскоре один из учителей правильно назвал цвет своей шляпы.

Кто это был?

*Решение:* Пусть А - передний мудрец, Б - второй и В - последний. Догадался передний мудрец. Он мог рассуждать, например, так:

«Поскольку последний в ряду мудрец В, который видит 2 шляпы, молчит, то у нас с Б не могут быть одновременно черные шляпы.

Рассуждая аналогично, мудрец Б догадался бы, что у него белая шляпа, если бы у меня была шляпа черная. Но Б пока молчит, следовательно, у меня шляпа белая».

Если в предыдущих задачах про мудрецов их положение было симметрично, и они догадывались о своих лбах и шляпах практически одновременно, то в этой задаче положение первого мудреца, который не видит ни одной шляпы, на первый взгляд самое трудное.

В действительности только он и может догадаться, если все три шляпы белые.

**4.** Утренний прогноз погоды.

1. Если сегодня дождя не будет, то завтра будет ветреная погода.

2. Если же сегодня дождь пройдет, то завтра осадков не будет.

3. Если сегодня будет холодно, то и влажность сегодня будет высокой.

4. Если сегодня будет тепло, то завтра будет безветренно.

5. Если сегодня ветра не будет, то завтра будет тепло.

6. Если же сегодня будет ветрено, то завтра будет дождь, хотя влажность воздуха будет низкой.

7. Если завтра осадков не будет, то завтра будет холодно, а влажность останется такой же, как сегодня.

Какой будет погода сегодня и завтра, без всяких «если»?

*Решение:* Из п. 5 и 6 следует, что завтра не может быть одновременно и холодно, и без осадков, и высокая влажность.

Тогда из п. 2 следует, что сегодня дождя не будет.

Тогда из п. 1 следует, что завтра будет ветрено.

Тогда из п. 4 следует, что сегодня будет холодно.

Тогда из п. 3 следует, что сегодня и влажность будет высокой.

Тогда из п. 7 следует, что и завтра влажность будет высокой.

Тогда из п. 6 следует, что сегодня будет безветренно.

Тогда из п. 5 следует, что завтра будет тепло.

Итак, сегодня будет безветренно, холодно, дождь не ожидается, но влажность будет высокой.

Завтра потеплеет и при высокой влажности будет ветрено и дождливо.

**5.** Игра в шахматы. В финале турнира шахматистов встретились представители 6 воинских званий: майор, капитан, лейтенант, старшина, сержант и ефрейтор, разных специальностей: летчик, танкист, артиллерист, минометчик, сапер и связист.

Определите специальность каждого из шахматистов по следующим данным.

В первом туре лейтенант выиграл у летчика, майор у танкиста, а сержант у минометчика. Во втором туре капитан выиграл у танкиста. В третьем и четвертом турах минометчик из-за болезни не участвовал в турнире, поэтому свободными от игры оказались капитан и ефрейтор. В четвертом туре майор выиграл у связиста. Победителями турнира оказались лейтенант и майор. Хуже всех выступил сапер.

***Решение:***

Будем решать задачу, исключая те случаи, которые противоречат какому-либо из условий задачи.

Для удобства решения составим прямоугольную таблицу, в которой по вертикали запишем воинские звания шахматистов, а по горизонтали – их специальности.

Рассмотрим, кто с кем играл первую партию.

В условии сказано, что лейтенант выиграл у летчика, ясно, что лейтенант – не летчик.

Но одновременно с лейтенантом и летчиком на другой доске играл майор с танкистом, значит, лейтенант и не танкист, а майор – не танкист и не летчик.

Учитывая, что на третьей доске играл сержант с минометчиком, мы получаем, таким образом, следующий вывод: лейтенант – не летчик, не танкист и не минометчик.

Ставим в таблице в соответствующих клеточках знак минус, то есть в строке «лейтенант» ставим минусы в 1, 2 и 4-й клеточках (считая слева направо).

В тех же трех столбцах ставим минусы и в строке «майор», ибо и майор – не летчик, не танкист и не минометчик.

По той же причине вписываем минусы в 1, 2 и 4-ю клеточки строки «сержант».

Так как во втором туре капитан выиграл у танкиста, значит, капитан – не танкист, вносим в таблицу еще один минус в соответствующую клеточку (2-я строка, 2-й столбец).

В третьем туре минометчик должен был играть с капитаном, а в четвертом – с ефрейтором, следовательно, минометчик – не капитан и не ефрейтор.

Вписываем в 4-й столбец два минуса в соответствующие клеточки (2 и 6-я, считая сверху вниз).

В четвертом туре майор выиграл у связиста, значит, майор – не связист.

По результатам турнира можно судить, что сапер – не майор и не лейтенант.

Вписав в таблицу и эти последние три минуса, мы получим следующую таблицу:

По смыслу задачи в каждой строке и в каждом столбце должен быть плюс и только один, ибо каждую специальность имеет только один из шахматистов и каждое воинское звание имеет только один из шахматистов, так как всего шесть различных воинских званий и шести разных специальностей.

Рассмотрим четвертый столбец:

в пяти клеточках стоят минусы, значит, минометчиком является старшина, что обозначим знаком плюс.

Но тогда в. остальных пяти клеточках 4-й строки можно поставить минусы.

Рассмотрим теперь 2-й столбец.

Легко сообразить, что танкистом является ефрейтор.

Поставим плюс во 2-й клеточке последней строки, в остальных клеточках этой строки поставим минусы.

Затем устанавливаем, что летчик – капитан, сапер – сержант, связист – лейтенант, майор – артиллерист.

Можно было рассматривать не столбцы, а строки.

Иногда рассматривают попеременно и строки, и столбцы.

**6.** О профессиях, городах и товарищах.

Три товарища – Иван, Дмитрий и Степан – преподают различные предметы (химию, биологию, физику) в школах Москвы, Ленинграда и Киева.

Известно, что:

1. Иван работает не в Москве, а Дмитрий не в Ленинграде;

2. Москвич преподает не физику;

3. Тот, кто работает в Ленинграде, преподает химию;

4. Дмитрий преподает не биологию.

Какой предмет и в каком городе преподает каждый из товарищей?

*Решение:*

Выделим три множества: множество имен, множество предметов и множество городов.



Элемент каждого из множеств на рисунке 1 задан своей точкой (буквы на этом рисунке — первые буквы соответствующих слов).

Если две точки из разных множеств характеризуют признаки разных людей, то будем соединять такие точки штриховой линией.

Если же две точки из разных множеств соответствуют признакам одного человека, то такие точки будем соединять попарно сплошными линиями.

Существенно, что по условию задачи для каждой точки любого множества в каждом из остальных множеств найдется одна и только одна точка, ей соответствующая.

Таким образом, граф на рисунке 1 содержит все заданные в условии элементы множеств и отношения между ними.

Задача на языке графов сводится к нахождению трех «сплошных» треугольников с вершинами в разных множествах.

Рассмотрим граф на рисунке 1.

Напрашивается штриховой отрезок ХД. Действительно, Л соответствует X и, одновременно, Л не соответствует Д, т. е. X не может соответствовать Д.

Итак, используется типичная для такого рода задач операция на графе: если у треугольника с вершинами в трех разных множествах одна сторона сплошная, вторая – штриховая, то третья должна быть штриховой.

Из условия задачи следует равномерность еще одной операции на графе: если какая-то точка соединена штриховыми отрезками с двумя точками во втором множестве, то ее следует соединить с третьей точкой этого множества сплошным отрезком.

Так проводится сплошной отрезок ДФ.

Далее проводится штриховой отрезок ДМ (в треугольнике ДФМ сторона ДФ сплошная, а ФМ – штриховая), ДК сплошным (ДМ и ДЛ штриховые), теперь соединим точки Ф и К сплошным отрезком.

Если в треугольнике с вершинами в разных множествах две стороны сплошные, то третья тоже будет сплошной.

Найден первый «сплошной» треугольник ДФК.

Так, не возвращаясь к тексту задачи, руководствуясь лишь естественными операциями на графе, описанными выше, мы находим решение.



Отметим последовательность,

в которой проводились отрезки: ХД, ДФ, ДМ, ДК, ФК, МС, ИЛ, ХИ, БМ, БС.

Вершины каждого из трех полученных «сплошных» треугольников определяют ответ задачи:

Иван преподает химию в Ленинграде, Дмитрий – физику в Киеве и Степан – биологию в Москве.

# **Занятие №19**

**Логические задачи – комбинаторные задачи**

## **Задачи**

**1.** Учащиеся 6-го класса решили обменяться фотографиями. Сколько фотографий для этого потребуется, если в классе 11 учащихся?

*Решение*. 11 человек по 10 фотографий: 11∙10 = 110 фотографий.

**Ответ:** 110.

**2**. Из села Терновка в село Родничок ведут три дороги, а из села Родничок в город Балашов — четыре дороги. Сколькими способами можно попасть из села Терновка в город Балашов через село Родничок?
*Решение.* 3∙4 = 12 способами.



**Ответ:** 12.

**3**. В кафе имеются четыре первых блюда, пять вторых и два третьих. Сколькими способами посетители кафе могут выбрать обед, состоящий из первого, второго и третьего блюд?

*Решение*. 4∙5∙2 = 40 способами.

**Ответ**: 40.

**4.** Сколькими способами можно зажечь свет в нашем классе? (в классе 3 лампочки, у каждой – отдельный выключатель)

***Решение*:** а) прямой подсчет – перебор возможных способов: 0 лампочек (все выключены) – 1 случай, 1 лампочка – 3 случая, по 2 лампочки – 3 случая, все 3 – 1 случай – то есть 1 + 3 + 3 + 1 = 8; б) рассмотрение ситуации по отдельности для каждой лампочки – либо «вкл», либо «выкл»; правило произведения: 2 × 2 × 2 = 8; графическое отображение в виде дерева возможностей.

**5**. В гардеробе в беспорядке лежат 20 пар ботинок. 10 пар черных и 10 пар белых. Сколько нужно взять ботинок, чтобы среди них оказалась хотя бы одна пара (правый и левый ботинок) одного цвета? В гардеробе темно и нельзя отличить правый ботинок от левого.

*Решение*: Мы можем вытащить по 10 ботинок разного цвета (10 белых левых и 10 черных левых) **получается вытянули 20 ботинок** и останутся ещё 20 ботинок ( 10 белых правых и 10 черных правых) и соответственно следующий 21 ботинок в любом случае окажется. Ответ**. 21**

**6.** В темной комнате 10 арбузов и 8 дынь (дыни и арбузы не различимы на ощупь). Сколько нужно взять фруктов, чтобы среди них было не менее 2 арбузов?

*Решение*. Для того, чтобы достать не менее 2 арбузов, нужно взять не менее 10 фруктов. Если взять меньше, то среди них могут оказаться 8 дынь и арбузов будет меньше, чем 2.

**7**. Сколько диагоналей у тридцатичетырехугольника ?

Решение. Каждая вершина многоугольника соединена диагоналями со всеми остальными вершинами, кроме двух соседних. Таким образом, каждая диагональ 34-хугольника соединена диагоналями с 31 вершиной. Поэтому диагоналей у 34-хугольника 34\*32:2=17\*31=527.

**8.** Задача с многими условиям

а) В магазине «Все для чая» продаются 5 разных чашек и 3 разных блюдца. Сколькими способами можно купить там набор «чашка  +  блюдце»?

б) В тот же магазин завезли еще 4 вида чайных ложек. Сколькими способами можно купить комплект «чашка  +  блюдце  +  ложка»?

в) Известно, что одна из чашек, одно из блюдец и одна из ложек – золотые. Сколькими способами можно купить набор из 3-х различных предметов, в котором

в1) нет золотых предметов?

в2) 1 золотой предмет?

в3) 2 золотых предмета?

в4) 3 золотых предмета?

г) Сколькими способами в магазине можно купить комплект из двух предметов?

д) сколькими способами можно купить комплект из 1 предмета?

е) Ясно, что «купить 0 предметов» можно единственным способом. Каков смысл равенства 1 + 12 + 47 + 60 = 6 × 4 × 5?

***Решение:***

а) по правилу произведения получаем 5 × 3 = 15.

б) 5 × 3 × 4 = 60.

в1) считаем количество не-золотых предметов: 4 чашки, 2 блюдца, 3 ложки. По правилу произведения получаем 4 × 2 × 3 = 24.

в2) подметим, что 1 золотой предмет – либо чашка, либо ложка, либо блюдце. Если это чашка, то имеем 1 × 2 × 3 = 6 способов, если это блюдце, то число способов равно 4 × 1 × 3 = 12, наконец, для ложки получаем 4 × 2 × 1 = 8 способов. Итого – 26.

в3) возможны 2 разумных перебора – либо по парам золотых предметов («чашка + блюдце», «чашка + ложка", «ложка + блюдце"), либо перебор не-золотых предметов. При обоих подходах получаем 1 × 1 × 3 + 1 × 2 × 1 + 4 × 1 × 1 = 9 способов.

После задач в2) и в3) формулируем правило суммы и когда им надо пользоваться.

в4) 1 способ. ( = 1 × 1 × 1). Усложняем задачу ученикам: как получить ответ другим способом? Вот этот способ: так как всего возможностей 60 (см. задачу б)), а в задачах в1)–в3) были найдены 24 + 26 + 9 = 59 из них, то на долю задачи в4) остался последний, единственный, способ. Обращаем внимание школьников на необязательность, но желательность проверки равенства 60 = 24 + 26 + 9 + 1 при самостоятельном решении подобных задач.

г) по правилу суммы – 5 × 3 + 5 × 4 + 3 × 4 = 47 способов.

д) 5 + 4 + 3 = 12.

е) смысл состоит в том, что мы добавляем для каждого предмета еще одну возможность – либо покупать его, либо нет. Это значит, что мы как бы вводим шестую «липовую чашку», четвертое «липовое блюдце" и пятую «липовую ложку». Если выбран «липовый" предмет, это означает, что мы данный вид посуды просто не покупаем. Но теперь есть всего 6 × 4 × 5 способов выбрать набор из 3-х предметов (некоторые из которых будут липовыми), а сумма слева представляет собой разбиение на случаи «0 липовых», «1 липовый", «2 липовых", «3 липовых".

# **Занятие №20**

**Логические задачи – на взаимно однозначное соответствие**

## **Задачи**

**1.** Царь призвал ко двору трех богатырей. И спрашивает: - Кто убил Змея Горыныча?

Илья Муромец сказал: — Змея убил Добрыня Никитич.

Добрыня Никитич сказал: — Змея убил Алёша Попович.

Алёша Попович сказал: — Я убил змея.

Только один богатырь сказал правду, остальные два слукавили. Так кто же убил Змея Горыныча?

*Решение*. Допустим, Илья слукавил, тогда Змея убил, например, Алеша. Тогда двое других богатырей сказали правду, но это противоречит условию. Тогда пусть сам Илья и убил, а сказал неправду из скромности. Тогда и другие богатыри соврали. Значит правду сказал Илья Муромец: Змея убил **Добрыня Никитич**.

**2.** Михаилу в викторине предложили выбрать один из ящиков. В одном из ящиков спрятан приз. Михаил получил 4 подсказки

- приз в желтом или красном ящике

- приз в зеленом или синем ящике

- приз в зеленом ящике

- в желтом ящике приза нет

Три подсказки ошибочны, но только одна правильная.

Андрей подумал и открыл правильный ящик. Какого цвета?

**Ответ: Желтый**

**3.** Три сестры: Полли, Сара и Ада. Они приехали из деревни в большой город учиться. Одна сестра стала строителем, одна архитектором, а третья поваром. Позже все сестры вышли замуж. Одного мужа звали господин Адамсон, второго просто Педро, а третьего величали доктором Смитом. Ни у кого в семьях не совпали первые буквы профессии, имени мужа и жены. (Сара не стала строителем и ее муж не Смит). Жена Педро не строитель. Как зовут жену доктора?

**Ответ: Ада. Она же повар.**

**4.** Волчонок, мартышка и бегемотик подошли к карусели, на которой кружились машинка и самолетик. Каждый из друзей хотел прокатиться и на том, и на другом. Машинка и самолетик вмещали только по одному пассажиру. За три захода каждый из друзей по разу прокатился на машинке и на самолетике. В первый заход мартышка прокатилась на самолетике, а волчонок — на машинке. Во время второго захода на самолетике катался волчонок. Кто и на чем катался во время третьего захода?

**5.** Вася, Гена и Женя соревновались в беге. Кто из них прибежал первым, кто — вторым, и кто — третьим, если верны следующие утверждения:

1) Вася прибежал не первым, а Женя — не вторым;

2) Гена прибежал не третьим, а Вася — не вторым?

**6.** В одном классе учатся Иван, Петр и Сергей. Их фамилии — Иванов, Петров, Сергеев. Установите фамилию каждого из ребят, если известно, что Иван по фамилии не Иванов, Петр — не Петров, Сергей — не Сергеев и что Сергей живет в одном доме с Петровым.

**7.** Галя, Марина и Оля пришли на праздничный утренник в платьях разного цвета: в желтом, синем и розовом. Галя была не в желтом, Марина — не в желтом и не в розовом. В каком платье была каждая девочка?

**8.** Три одноклассницы — Соня, Тоня и Женя — занимаются в различных спортивных секциях: одна — в гимнастической, другая — в лыжной, третья — в секции плавания. Каким видом спорта занимается каждая из девочек, если известно, что Соня плаванием не увлекается, а Женя является победителем соревнований по лыжам?

# **Занятие №21**

**Логические задачи - на определение веса**

## **Задачи**

**1.** Определение более тяжелой монеты из 27 монет.

Из 27 монет одна фальшивая, отличающаяся от остальных большим весом.

Какое минимальное число взвешиваний на чашечных весах без гирек потребуется для определения поддельной более тяжелой монеты?

*Решение:*

Разделим все монеты на 3 кучки по 9 монет.

1. Взвесим две любые кучки. Во время этого первого взвешивания определим кучку, в которой находится фальшивая монета. Если взвешиваемые кучки по весу равны, то фальшивая монета находится в третьей кучке, в противном случае поддельная монета окажется в той кучке, которая окажется тяжелее.

2. Из подозрительной кучки в 9 монет возьмем две любые тройки монет и взвесим их. Если выбранные произвольно группы из трех монет окажутся равными по весу, то фальшивая монета будет в третьей, невзвешиваемой тройке, в противном случае поддельная монета в той кучке из 3 монет, которая окажется тяжелее.

3. Возьмем из подозрительной тройки монет две любые и взвесим. Та монета, которая перевесит, и будет фальшивой. Если выбранные монеты окажутся одинакового веса, то поддельной будет третья монета.

Таким образом, из 27 монет с помощью трех взвешиваний всегда можно найти одну более тяжелую монету.

**2.** Две фальшивые из 103 монет. Среди 103 монет имеются 2 одинаковые фальшивые, которые отличаются от подлинных лишь весом.

Какое минимальное число взвешиваний на весах без гирь потребуется для определения, что тяжелее: настоящие или фальшивые монеты?

*Решение:* 1. Разделим монеты на 3 равные кучки по 34 монеты: А, В и С. В этих кучках может оказаться 1 или 2 фальшивые монеты.

1-е взвешивание. Взвесим кучки А и В.

2-е взвешивание. Взвесим кучки В и С. Возможны следующие разные варианты взвешиваний:

1. А = В и В > С;

2. А > В и С > В.

Рассмотрим вариант 1.

Возможны 2 случая: либо по одной фальшивой монете в кучках А и В,

и тогда фальшивая монета тяжелее настоящей,

либо в кучках А и В настоящие монеты,

и одна или две более легкие фальшивые монеты - в кучке С.

Дилемму можно разрешить при помощи третьего взвешивания.

3-е взвешивание.

Кучку А (или В) делим примерно пополам и сравниваем половинки. Если они равны, то фальшивые монеты легче и находятся в кучке С. Если одна из половинок кучки А тяжелее другой, то фальшивая монета тяжелее подлинной.

Рассмотрим вариант 2.

Возможны 2 случая: либо в кучках А и С находится по одной тяжелой монете (тогда в кучке С находятся подлинные монеты), либо в кучке С находится одна или две более легкие фальшивые монеты (тогда в кучках А и В оказались подлинные монеты).

Третье взвешивание позволяет определить, какая монета тяжелее - фальшивая или настоящая.

**3**. Определение веса одной из 5 гирь.

5 кубиков весят 1000, 1001, 1002, 1004 и 1007 г.

Какое минимальное число взвешиваний на весах с гирьками (или со стрелкой) потребуется для определения кубика весом 1000 г?

*Решение:* 1-е взвешивание.

Берем произвольную пару кубиков и определяем их суммарный вес, по которому можно судить, есть ли среди этой пары искомый кубик. Если есть, то во время второго взвешивания выбранных кубиков определяем, какой именно имеет вес 1000 г, и, таким образом, задача решена. Если нет, то производи второе взвешивание.

2-е взвешивание.

Берем вторую произвольную пару кубиков из оставшейся тройки. Взвешиваем ее и определяем, есть ли среди этой пары искомый кубик. Если нет, то 1000-граммовый кубик будет пятым, который не попал ни в первую, ни во вторую пару, и вновь задача решена. Если искомый кубик находится среди второй пары случайно выбранных кубиков, то необходимо третье взвешивание.

3-е взвешивание.

Искомый кубик, находящийся среди второй пары выбранных кубиков, однозначно определяется при их взвешивании.

Таким образом, для решения задачи требуется не более 3 взвешиваний (и не менее двух).

**4.** Раскладывание 1002 гирь на 3 равные кучки.

Как разложить на 3 равные кучки 1002 гирьки, имеющие вес 1, 2, 3, ..., 1002 г?

*Решение:* Будем раскладывать гирьки в порядке возрастания их весов в три мысленно пронумерованные кучки, поочередно начиная то с № 1, то с № 3



Видно, что равенство весов в кучках достигается лишь после четного количества операций разложения гирек по трем кучкам.

Таким образом, данный алгоритм годится лишь для такого количества гирек с весами натурального ряда, которое при делении на 3 даст четное число.

**5.** Наличие 2 фальшивых среди 1000 монет.

Среди 1000 монет могут быть (а могут и не быть) фальшивые монеты в количестве не более двух штук.

Какое необходимо минимальное число взвешиваний на весах без гирь для того, чтобы определить, есть ли фальшивые монеты среди 1000 монет, и если есть, то тяжелее они подлинных или легче? Как изменится ответ, если фальшивой может быть одна монета из 2000 штук?

*Решение:* Разделим монеты поровну и взвесим (1-е взвешивание).

Возможны 2 варианта:

А (группы по 500 монет весят одинаково) и

Б (одна из групп в 500 монет тяжелее другой).

**А**. Число фальшивых монет 0 или 2 (по одной в каждой группе).

Опять разделим любую из групп на две по 250 монет и взвесим (2-е взвешивание).

Если чаши весов опять будут в равновесии, то фальшивых монет нет, так как они в этот раз не могут находиться по одной на каждой чаше, ибо на обеих чашах (500 монет) может быть не более одной фальшивой монеты.

Если одна из чаш весов перевесила, то, значит, имеется одна фальшивая монета, и осталось определить, тяжелее она или легче настоящих монет. Для этого более тяжелую группу из 250 монет опять делим пополам и взвешиваем (3-е взвешивание). Если две группы по 125 монет будут весить одинаково, то фальшивая монета легче настоящих и находится в той группе из 250 монет, которая при предыдущем взвешивании оказалась легче. Если одна из групп в 125 монет перевесила, то фальшивая монета тяжелее подлинных и находится в этой перевесившей группе.

**Б.** Число фальшивых монет 1 или 2, и они лежат на одной чашке.

Разобьем одну из групп (для определенности – более тяжелую) на две и взвесим (2-е взвешивание).

Если одна из групп в 250 монет перевесила, то фальшивые монеты находятся среди этих взвешиваемых 500, и они тяжелее настоящих.

В задаче не спрашивается, сколько фальшивых монет одна или две, поэтому в этом случае достаточно 2 взвешиваний.

Если взвешиваемые группы по 250 монет находятся в равновесии, то либо фальшивые монеты легче и находятся среди не взвешиваемых пятисот, либо они тяжелее, но их две – по одной в каждой взвешиваемой группе.

Для разрешения этого вопроса необходимо 3-е взвешивание. Разделим любую группу пополам и взвесим.

Если весы будут в равновесии, то среди взвешиваемых монет нет фальшивых, так как фальшивая монета на обоих весах может быть только одна; поэтому фальшивые монеты легче настоящих.

Если одна из чаш перевесит, то фальшивая монета тяжелее подлинных.

Как видно, в любом случае для определения наличия фальшивых монет и их веса относительно подлинных необходимо не более 3 взвешиваний.

# **Занятие №22**

**Задачи на смекалку для тренировки умственных способностей**

## **Задачи**

**1. О лифте**

Человек живет на 17-м этаже. На свой этаж он поднимается на лифте только в дождливую погоду или тогда, когда кто-нибудь из соседей с ним едет в лифте. Если погода хорошая и он один в лифте, то он едет до 9-го этажа, а дальше до 17-го этажа идет пешком по лестнице... Почему?

Ответ: Этот человек - лилипут, и до кнопки 17-го этажа дотягивается только зонтиком или просит кого-нибудь нажать на эту кнопку.

**2. Флаг на воздушном шаре**

Воздушный шар уносится непрерывным ветром в южном направлении. В какую сторону развиваются при этом флаги на его гондоле?

Ответ: Шар, уносимый воздушным течением, находится по отношению к окружающему воздуху в покое; поэтому флаги не станут развиваться на ветру ни в какую сторону, а будут свисать, вниз, как в безветрие.

**3. Два шнура**

У Вас есть два шнура (фитиля). Каждый шнур, подожженный с конца, полностью сгорает дотла ровно за один час, но при этом горит с неравномерной скоростью. Как при помощи этих шнуров и зажигалки отмерить время в 45 минут?

Ответ: Необходимо поджечь первый шнур одновременно с обоих концов - получаем 30 минут. Одновременно с первым шнуром поджигаем второй шнур с одного конца, и когда первый шнур догорит (30 минут),- поджигаем второй шнур с другого конца (оставшиеся 15 минут).

**4. Форма яйца**

Считается, что есть веская причина, по которой у птичьих яиц один конец тупее другого. Что это за причина?

Ответ: Сферические и овальные яйца катились бы по прямой. Асимметричные же яйца, у которых один конец тупее, а другой острее, при скатывании стремятся катиться по кругу. Если яйцо лежит на краю обрыва или в другом ненадежном месте, стремление катиться по кругу, а не по прямой - большое преимущество.

**5. Переправа**

Имеется круглое глубокое озеро диаметром 200 метров и два дерева, одно из которых растет на берегу у самой воды, другое - по центру озера на небольшом островке. Человеку, который не умеет плавать, нужно перебраться на островок при помощи веревки, длина которой чуть больше 200 метров. Как ему это сделать?

Ответ: Привязав веревку одним концом к дереву, растущему на берегу, необходимо обойти с веревкой озеро по окружности и привязать второй конец веревки к тому же дереву. В результате между деревьями будет натянута сдвоенная веревка для переправы на остров.

**6. Поездки в трамваях**

Вдоль улицы, на которой я проживаю, курсируют трамваи красного и синего цвета, относящиеся к одному и тому же маршруту. Количество тех и других трамваев одинаковое. Красные трамваи, равно как и синие, ходят с одинаковым интервалом времени, составляющим десять минут. В течение дня я совершаю по несколько поездок, причем в самое разное время. Казалось бы, количество поездок в трамваях красного и синего цвета должно быть приблизительно одинаковым с возможным небольшим отклонением. Однако, в силу некоторых обстоятельств, фактическое количество поездок в трамваях красного цвета составляет, чуть ли не 90% от количества всех поездок. Как можно объяснить такое явление?

Ответ: Трамваи одного цвета ходят относительно друг друга с интервалом в десять минут. Между трамваем красного цвета и следующим за ним трамваем синего цвета интервал движения составляет одну минуту, а между трамваем синего цвета и следующим за ним трамваем красного цвета - девять минут.

**7. Может ли такое быть?**

Одного человека спросили:

- Сколько вам лет?

- Порядочно, - ответил он.

- Я старше некоторых своих родственников почти шестьсот раз. Может ли такое быть?

Ответ: Может, например если человеку 50 лет, а его внуку или внучке 1 месяц.

**8. Кофе с сахаром**

Чашка кофе с кубиком сахара стоит 1 доллар 10 центов. Известно, что кофе дороже кубика сахара на 1 доллар. Сколько стоит само кофе, и сколько стоит кубик сахара?

Ответ: Кофе стоит 1 доллар 5 центов, а кубик сахара - соответственно 5 центов.

**9. Насколько длинный... кубический метр!?**

Если один кубический метр разделить на составляющие его кубические миллиметры и соединить их между собой гранями в одну прямую линию, то каковой длины окажется эта линия?

Ответ: 1000 км.

**10. Полуночный дождь**

Если в 12 часов ночи идет дождь, то можно ли ожидать, что через 72 часа будет солнечная погода?

Ответ: Нет, так как через 72 часа снова будет полночь.

# **Занятие №23**

**Геометрические задачи на логику**

## **Задачи**

**1.** Прямоугольник 4 х 9 и квадрат.

Как разрезать прямоугольник со сторонами 4 х 9 на минимальное число частей, чтобы из них сложить квадрат?

*Решение:*

Поскольку площади прямоугольника и квадрата должны быть равны, то сторона квадрата 6.

Поэтому откладываем по 6 на больших сторонах прямоугольника и делаем ступенчатый разрез, о котором можно догадаться, вспомнив о центральной симметрии прямоугольника.



Нетрудно убедиться в том, что при произвольных сторонах прямоугольника ступенчатый разрез не позволит составить равновеликий квадрат.

**2.** Прямоугольник 1 х 3 и симметричное преобразование в квадрат.

Как симметрично разрезать прямоугольник со сторонами 1 х 3 на 9 частей, чтобы из них сложить квадрат?

*Решение:*

Сначала разрезаем 2 квадрата по диагоналям и 4 полученных треугольника располагаем вокруг оставшегося квадрата, приставив части их гипотенуз к его сторонам.

Мысленно соединяем точки прямых углов между собой линиями и вдоль них делаем последние 4 разреза, отрезав от прямоугольных треугольников небольшие тупоугольные треугольники, для которых, как это следует из рисунка, как раз имеются соответствующие местечки.



**3.** Греческий крест и квадрат.

Разрезать греческий крест так, чтобы из кусочков можно было сложить квадрат.

а) четырьмя прямыми линиями, используя центральную симметрию;

б) двумя прямыми линиями.

*Решение:*



**4.** Две шестиконечные звезды и шестиугольник.

Разрезать правильный шестиугольник на наименьшее число частей так, чтобы составить две шестиконечных звезды.

*Решение:*



**5.** Восьмиугольник и квадрат.

Большинство предложенных ранее головоломок достаточно легко решается с помощью двухполосного метода наложения.

Однако этот метод отнюдь не всегда приводит к желаемому результату.

Например, преобразование правильного восьмиугольника в квадрат, вероятно, легче сделать с помощью метода проб и ошибок, используя симметрию восьмиугольника, чем методом наложения двух полос.

Можно воспользоваться еще одним методом решения задач на разрезание – методом наложения мозаик.

Суть этого очень наглядного и простого метода, позволяющего решать весьма трудные задачи о преобразовании правильных многоугольников, – в наложении двух подходящих (обычно полуправильных) мозаик.

Итак, как преобразовать правильный шестиугольник в квадрат так, чтобы число разрезанных частей было наименьшим?

*Решение:*



Если попробовать разрезать правильный восьмиугольник так, чтобы сложить полосу, то можно убедиться, что одной из причин неудачи является квадрат со стороной, равной стороне восьмиугольника, половинки которого все время «мешаются».

Это позволяет предположить, что одной из мозаик должна быть очень распространенная среди мозаик полуправильная мозаика из восьмиугольников и квадратов.

Тогда в качестве второй мозаики целесообразно выбрать полуправильную мозаику из квадратов двух размеров, один из которых искомый, а второй тот же, что и в первой мозаике.

Итак, правильный восьмиугольник можно разрезать на 4 одинаковых четырехугольника и квадрат со стороной, равной стороне шестиугольника.

# **Занятие №24**

**Логические задачи на переливание**

## **Задачи**

**1.** Отмерить 3 л, имея сосуд 5 л.

Какое наименьшее число переливаний потребуется для того, чтобы в четырехлитровую кастрюлю с помощью крана и пятилитровой банки налить 3 литра воды?

*Решение:*

Наливаем кастрюлю. Переливаем воду из кастрюли в банку.

Наливаем кастрюлю. Доливаем полную банку, и в кастрюле остается 3 литра.

**2.** Деление 10 л поровну, имея сосуды 3, 6 и 7 л.

Разделить на 2 равные части воду, находящуюся в 6-литровом сосуде (4 л) и в 7-литровом (6 л), пользуясь этими и 3-литровым сосудами.

Какое наименьшее количество переливаний потребуется?

*Решение:*

В скобках – второй вариант решения.



**3.** Деление 8 л поровну, имея сосуды 8, 5 и 3 л.

Разделить на две равные части воду, находящуюся в полном 8 литровом сосуде, пользуясь этим и пустыми 5- и 3-литровыми сосудами.

Какое наименьшее количество переливаний потребуется?

*Решение:*



**4.** Деление 16 л поровну, имея сосуды 6, 11 и 16 л.

Разделить на две равные части воду, находящуюся в полном 16 литровом сосуде, пользуясь этим и пустыми 11- и 6-литровыми сосудами.

Какое наименьшее количество переливаний потребуется?

*Решение:*



**5.** Два сосуда и кран с водой.

Какое наименьшее число переливаний необходимо для того, чтобы с помощью 7- и 11-литровых сосудов и крана с водой отмерить 2 л?

*Решение:*

Если сначала наполнить 11-литровый сосуд, то потребуется 18 переливаний, а если 7-литровый, то, как следует из рисунка, – всего 14.



# **Занятие №25**

**Логические задачи на закономерности**

## **Задачи**

**1:** РАЗРЕЗАНИЕ ТОРТА НА 8 ОДИНАКОВЫХ ЧАСТЕЙ.

Каково наименьшее число прямолинейных разрезов однородного торта на 8 одинаковых частей?

Торт имеет круглую форму.

*Решение:*

Двумя разрезами можно разделить круглую поверхность торта на 4 равные части.

Третий разрез разделит торт на 2 равные части по толщине,

т. е. он будет проведен в плоскости параллельно верхней и нижней круглым поверхностям.

**2:** ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ СВОЙСТВО.

По какому признаку классифицированы буквы русского алфавита?

1. Б, Г, Д, Й, Р, Ц, Ч, У, Щ, Ъ, Ы, Ь, Я.

2. А, Л, М, П, Т, Ш, Г, Д.

3. В, Е, К, С, 3, Э, Ю.

4. И.

5. Ж, О, Н, X, Ф.

*Решение:*

Если принимать во внимание лишь существенные особенности букв, игнорируя мелкие детали шрифта, то можно заметить, что во второй строке буквы обладают вертикальной осью симметрии, в третьей – горизонтальной.

Буква "И" обладает центральной симметрией.

Буквы пятой строки обладают всеми предыдущими видами симметрии,

а буквы первой строки несимметричны.

**3**: ЗАКОНОМЕРНЫЕ ТЕЛЕФОНЫ.

Один человек предпочитал смысловую память другим ее видам и поэтому всегда, когда надо было запомнить какие-либо числа, пытался находить в них закономерности. Когда его назначили директором завода, он первым делом присвоил каждому начальнику отдела новый четырехзначный номер телефона заводской АТС по известной ему закономерности.

Какой номер телефона у Сергеева, если известны телефонные номера следующих сотрудников:

• Авербух – 7123;

• Белый – 5211;

• Елкин – 5715;

• Жлоп – 4817;

• Иванов – 6103;

• Сергеев – ?

*Решение:*

Первое число (цифра) – число букв в фамилии.

Второе число,(цифра или 2 цифры) - порядковый номер в алфавите начальной буквы фамилии.

Третье число (цифра или 2 цифры) – порядковый номер в алфавите последней буквы фамилии.

**4:** ЭПИДЕМИЯ ГРИППА.

В один день 50 человек в поселке с двухтысячным населением простудились и заболели гриппом. Хотя в дальнейшем никто не простужался, разразилась эпидемия гриппа, так как все здоровые в этом поселке считают своим долгом ежедневно навещать больных друзей и при этом заражаются. Грипп был такой, что им болели один день, и на следующий день выздоровевший имел иммунитет и заболеть не мог. Такой же однодневный иммунитет обеспечивала прививка, которую накануне начала эпидемии сделали 100 человек, и вакцина на этом закончилась.

Как долго продлится эпидемия, если каждый житель поселка имел не менее 2 друзей?

*Решение:*

Существование привитых людей, имеющих в первый день эпидемии иммунитет, позволяет эпидемии длиться бесконечно.

Действительно, пусть в первый день эпидемии здоровые В и С навестили больного друга А, причем у С есть иммунитет.

На следующий день заразившегося В навещают выздоровевший и имеющий иммунитет А и С, уже не имеющий иммунитета.

В этот день заражается С, и на следующий день он становится носителем вируса и вторично заражает А.

Эпидемия начинает циклически повторяться и может длиться сколь угодно долго.

**5:** ГАНГСТЕРСКАЯ РАЗБОРКА.

Умудренный опытом прошлых «стрелок», дон Бандитто (главарь преступных кланов города N) отлично знал, что стоит только одному из крутых парней, пришедших базарить, кому-нибудь что-нибудь сказать не то (или даже хотя бы не так на кого-то посмотреть), как тут же начнется пальба без промаха: каждый будет стрелять в ближайшего к себе человека или в одного из одинаково ближайших. Дон Бандитто не мог приказать крутым парням приходить без оружия, так как никто никому не доверял, и ему в том числе. Однако преступный дон сумел-таки обязать всех взять только по одному патрону. Но самой главной заслугой главаря в деле минимизации потерь в живой силе была продуманная расстановка братишек на площади, где планировали провести сходку.

Какое наименьшее число бандитов все же будет вынуждено отойти в мир иной, если всего придет 70 человек?

*Решение:*

Очевидно, для минимизации потерь нужно, чтобы несколько бандитов стреляли в одного, но, разумеется, с соблюдением условий задачи.

Наилучшим вариантом их размещения хочется сделать круг, чтобы все 69 бандитов, стоящие по окружности, стреляли в одного, стоящего в центре, который тоже убьет одного из них, и все потери составили бы 2 человека. Однако в описанном случае нарушается условие, согласно которому стрельба ведется в ближайшего (или одного из равноудаленных ближайших).

Расстояние между стоящими по окружности будет меньше расстояния до «центрового».

Ясно, что на окружности не разместить более 6 человек, так как отношение длины окружности к ее радиусу есть 2p.

Тогда из семи (6 + 1 =7) человек погибнут 2, а из семидесяти - 20.

Однако это не оптимальное размещение братишек.

Число 6 наталкивает на мысль взять в качестве элементарной ячейки размещения бандитов правильный шестиугольник с седьмым бандитом в центре (или несколько правильных шестиугольников, объединенных в ячейку).

Пусть десять братишек находятся в узлах (углах) двух правильных шестиугольников, наложенных друг на друга так, что их углы совместились с центрами другой фигуры.



Минимальными потери будут, если 8 «наружных» человек стреляют в двух «центровых» бандитов, которые также палят друг в друга.

Из 10 человек погибает только 2; из семидесяти 2 · (70 : 10) = 14.

# **Занятие №26**

**Олимпиада «После жаркого лета»**

Олимпиадные задания по математике. Автор-составитель Ю.В. Лепехин

## **Задачи**

**1 (438).**

Бактерия размножается делением. За 1 секунду из одной бактерии образуется 2, одна бактерия вместе со своим потомством заполняет пробирку за 1 час. За какое время эту же пробирку заполняют 2 бактерии?

*Решение:*

Рассуждаем так: 2 бактерии в одной пробирке появляются через 1 секунду, значит, нужно ровно на 1 секунду больше.

**Ответ:** 59 минут 59 секунд

**2 (439).**

В темном чулане стоит 20 банок. Из них 8 банок с клубничным вареньем, 7 – с малиновым и 5 – с клюквенным.

Какое наибольшее число банок можно взять (не зажигая света) так, чтобы там наверняка осталось по крайней мере 4 банки одного варенья и 3 банки другого?

*Решение:*

Если взять более 7 банок, то может оказаться, что малинового и клюквенного варенья осталось менее 3 банок.

Значит, взяли не более 7 банок. Проверим 7. Подходит.

**Ответ:** 7

**3 (440).**

В выражении 10011+100110010 разрешается заменять нули единицами.

Сколькими способами можно получить сумму, делящуюся на 18?

*Решение:*

10011+ 10010010 = 100120021. Чтобы это число делилось на 18, нужно, чтобы оно делилось и на 2, и на 9.

А чтобы это число делилось на 2, нудно последний 0 во втором числе заменить на 1. Чтобы это число делилось на 9, надо чтобы сумма цифр делилась на 9. А для этого нужно один из нулей заменить в одном из слагаемых. Это можно сделать 6 способами.

**Ответ:** 6

**4 (443).**

Можно ли так бросить мяч, чтобы он, пролетев некоторое расстояние, остановился и начал двигаться в обратном направлении?

**Ответ:** да, можно бросить мяч вертикально.

**5 (444).**

В букете 11 цветов, причем 5 из них – красные, а 6 – розы.

Какое наибольшее число белых гвоздик может быть в букете?

*Решение:*

В букете может быть 5 белых гвоздик. А вот 6 белых гвоздик быть уже не может, поскольку тогда после добавления 6 роз получилось бы уже 12 цветов.

**Ответ:** 5

**6 (446).**

Трое ребят разделили между собой карточки с цифрами. Леше достались цифры 7,2,4, Маше – 6,5,1, а Феде – 8,3,9.

Каждый из них старается получить разные числа, используя свои карточки и знаки четырех арифметических действий.

Кто из них получит число (20)

*Решение:*

На столе выкладываем четыре спички в виде креста, которые образуют четыре прямых угла. Пятую спичку прикладываем в центр креста и располагаем перпендикулярно плоскости стола. Пятая спичка образует с каждой из четырех, лежащих на столе прямые углы. Таким образом, получается 8 прямых углов.

**7 (447).**

Дерево высотой три метра дает тень длиной пять метров.

Какова длина тени у дерева высотой пять метров?

*Решение:*

Эти величины: высота дерева и длина его тени – прямо пропорциональны. Составим пропорцию, получаем $8\frac{1}{3}$ метра.

**Ответ:**$8\frac{1}{3}$ метра.

**8 (442).**

Что больше 23% от 42 или 42% от 23?

*Решение:*

23% от 42 будут равны $42\*0,23$, 42% от 23 будут равны $23\*0,42$

**Ответ:** одинаковы

**9 (441).**

Сколько существует четырехзначных чисел, у которых сумма чисел равна 4, а произведение цифр равно 0?

*Решение:*

Так как произведение цифр равно нулю, то в числе должен присутствовать хотя бы один ноль. Выпишем числа, которые удовлетворяют первому условию. Это числа:

4000; 3100; 3010; 3001; 2200; 2020; 2002; 2110; 2101; 2011; 1300; 1030; 1003; 1210; 1201; 1120; 1111; 1102; 1021; 1012.

Всего получилось 20 чисел. Но среди этих чисел одно не имеет в своей записи цифры 0. Это число 1111. Тогда получаем 19 искомых чисел.

**Ответ:** 19 чисел

# **Занятие №27**

**Турнир смекалистых.**

Олимпиадные задания по математике. Автор-составитель Ю.В. Лепехин

## **Задачи**

**1 (448).**

Три пятиклассника купили 14 пирожков, причем Коля купил в 2 раза меньше пирожков, чем Вася, а Женя – больше Коли, но меньше Васи.

Сколько пирожков купил каждый из них?

**Ответ:** Коля – 3 пирожка, Женя – 5 пирожков, Вася – 6 пирожков.

**2 (449).**

На доске записано число 3 728 954 106

Зачеркните в нем три цифры так, чтобы оставшиеся цифры в том же порядке образовывали как можно меньшее число.

*Решение:*

**Ответ:** 2 854 106.

**3 (451).**

На одной чашке весов 2 куска мыла, а на другой лежат 3/2 такого же куска и еще 50 г. Весы находятся в равновесии.

Какова масса куска мыла?

*Решение:*

Если снять с обеих чашек по $\frac{3}{2}$ куска мыла, то на одной чашке весов останется $\frac{1}{2}$ куска, а на другой – 50 г. Значит масса куска мыла равна 100 г.

**Ответ:** 100 г.

**4 (453).**

Как разложить семь алмазов в четыре одинаковые шкатулки, чтобы вес всех шкатулок получился одинаковым, если вес алмазов 1,2,3,4,5,6,7 граммов?

**Ответ:** 7+(1+6)+ (2+5)+ (3+4). Вес алмазов в каждой шкатулке будет 7 граммов

**5 (455).**

Пастух привел на мясокомбинат две трети от трети своего скота. Оказалось, что это 70 быков.

Сколько скота в стаде?

**Ответ:** 315

**6 (457).**

Как рассадить 45 кроликов в 9 клеток так, чтобы во всех клетках было разное количество кроликов?

*Решение:*

Посадим в первую клетку одного кролика, во вторую – два, в третью – три и т.д. Имеем: 1+2+3+4+5+6+7+8+9=45 кроликов.

**Ответ:** 1,2,3,4,5,6,7,8,9

# **Занятие №28**

**Олимпиадные задачи**

Олимпиадные задания по математике. Автор-составитель Ю.В. Лепехин

## **Задачи**

**1 (458).**

Мальчик «перенумеровал» все свои книжки с помощью трехбуквенного кода, используя все 26 букв латинского алфавита AAA, AAB, AAC,…, AAZ, ABA…Всего у него 680 книг.

Какой код последней его книги?

**Ответ:** BAD

**2 (459).**

Который сейчас час, если оставшаяся часть сток вдвое больше прошедшей?

**Ответ:** 8 часов утра

**3 (462).**

Принесли 5 чемоданов и 5 ключей от этих чемоданов, но известно, какой ключ от какого чемодана.

Сколько проб придется сделать в худшем случае, чтобы подобрать к каждому чемодану свой ключ?

*Решение:*

Первым из ключей, которые мы будем подбирать к чемодану, в самом худшем случае придется сделать 4 пробы.

Если ключ не подошел к 4 чемоданам из 5, значит, от соответствует пятому.

Вторым ключом в самом худшем случае сделаем 3 пробы и т.д.

Всего потребуется 10 проб (4+3+2+1 = 10).

**Ответ:** 10

**4 (464).**

Два человека чистили картофель. Один очищал в минуту 2 картофелины, а второй – 3 картофелины. Вместе они очистили 400 штук.

Сколько времени работал каждый, если второй проработал на 25 минут большего первого?

*Решение:*

Второй человек работая один очистил 75 картофелин (25\*3= 75). Вместе они очистили 325 картофелин (400-75 = 325), проработав совместно 65 минут (325:5= 65 минут).

Значит, первый работал 65 минут, второй – 90 минут.

**Ответ:** первый работал 65 минут, второй – 90 минут.

**5 (465).**

Чтобы подняться с первого этажа на третий этаж дома, нужно пройти 52 ступеньки.

Сколько ступенек надо пройти, чтобы подняться с первого этажа на шестой этаж того же дома (число ступенек между всеми этажами одинаково)?

*Решение:*

Чтобы подняться на третий этаж дома, нужно пройти два этажа. Значит, чтобы подняться на один этаж, надо пройти 26 ступенек (52:2 = 26). Чтобы подняться на шестой этаж этого же дома, нужно пройти 130 ступенек (26\*5 = 130), так как до шестого этажа 5 этажей.

**Ответ:** 130

**6 (466).**

Когда велосипедист проехал 2/3 пути, велосипед сломался. На остальной путь пешком он затратил вдвое больше времени, чем на велосипедную езду.

Во сколько раз велосипедист ехал быстрее, чем шел?

*Решение:*

Велосипедист пешком прошел $\frac{1}{3}$ пути, то есть вдвое меньше того, что проехал, а времени затратил пешком вдвое больше.

Следовательно, он ехал быстрее, чем шел в 4 раза.

**Ответ:** 4

# **Занятие №29**

**Олимпиадные задачи**

Олимпиадные задания по математике. Автор-составитель Ю.В. Лепехин

## **Задачи**

**1 (470).**

В стране 27 городов, каждые два из которых соединены авиалинией. Сколько авиалиний в стране?

*Решение:*

Каждый город соединен авиалинией с остальными. Итого 27\*26. Но при таком способе мы каждую авиалинию считаем дважды.

**Ответ:** 351

**2 (471).**

В оранжерее были срезаны гвоздики: белые и розовые – 400 штук, розовые и красные – 300, белые и красные – 440.

Сколько гвоздик каждого цвета срезано в оранжерее?

*Решение:*

Сложить все данные числа (400+300+440=1440) и разделить на два (1140:2 = 570). Получаем количество гвоздик всех трех цветов, срезанных в оранжерее. Получаем белых гвоздик – 270, розовых – 130, красных – 170.

**Ответ:** белых гвоздик – 270, розовых – 130, красных – 170.

**3 (473).**

Футбольный мяч состоит из 32 лоскутов: белых шестиугольников и черных пятиугольников. Каждый черный граничит только с белым, а каждый белый – с тремя белыми и тремя черными. Сколько лоскутиков белого цвета?

*Решение:*

х – белые, (32-х) – черные.

5\*(32-х) = 3х

160= 8х

х=20

**Ответ:** 20

**4 (474).**

Напишите наименьшее десятизначное число, в котором все цифры различны.

*Решение:*

Чтобы число с различными цифрами было наименьшим, необходимо, чтобы на первом месте стояла наименьшая из заданных цифр, на втором – наименьшая из оставшихся и т.д. Так как целое число с нуля начинаться не может, то наименьшее из десятизначных чисел с различными цифрами должно начинаться с цифры 1. Замена цифры 1 любой другой отличной от нуля цифрой увеличивает число. На втором месте должна стоять цифра 0 – наименьшая из девяти оставшихся цифр, на третьем – цифра 2 и т.д.

**Ответ:** 1 023 456 789

**5 (476).**

Семь человек обменялись фотографиями. Сколько при этом было создано фотографий?

*Решение:*

Так как каждый из семи человек дал 6 фотографий (всем, кроме себя), то всего было роздано 42 фотографии

**Ответ:** 42

**6 (475).**

В коробке лежат 4 красных и 3 синих карандаша. Их берут в темноте.

Сколько нужно взять карандашей, чтобы среди них был один синий?

**Ответ:** 5

# **Занятие №30**

**Математический бой**

Олимпиадные задания по математике. Автор-составитель Ю.В. Лепехин

## **Задачи**

**1(478).**

Трое учеников нашей школы – А, В, С – должны были принимать участие в областной математической олимпиаде.

При обсуждении того, кто из них может оказаться победителем были высказаны такие мнения:

а) А и В;

б) А и С;

в) В, но не С.

Оказалось, что двое из них получили дипломы победителе. Определите, кто из них стал победителем олимпиады, если из трех предложений полностью оправдалось лишь одно, другое – частично, а третье – полностью оказалось ложным.

**Ответ:** А и С

**2 (479).**

В записи 1\*2\*3\*4\*5 замените звездочки знаками действий и расставьте скобки так, чтобы получилось выражение, значение которого равно 100.

*Решение:*

Легко убедиться, что только сложением или вычитанием чисел, образованных из данных цифр, число 100 получить невозможно. Так как 100= 5522, то, чтобы получить число 100 с помощью умножения, необходимо, чтобы среди сомножителей, образованных из данных цифр, число 5 встречалось два раза. Так как одно число 5 и число 4 уже имеются в данной записи, то для решения задачи достаточно с помощью оставшихся трех цифр получить число 5.

Это можно сделать двумя способами:

5= 2+3=1\*(2+3). Поэтому задача имеет два решения:

(1\*2+3)\*4\*5 = 100;

1\*(2+3)\*4\*5 = 100

**Ответ:** 100

**3 (480).**

Во сколько раз лестница, ведущая на шестой этаж дома, длиннее, чем лестница, ведущая на второй этаж?

**Ответ:** в 5 раз

**4 (481).**

Сколько существует двузначных чисел, записанных только:

А) нечетными цифрами;

Б) четными цифрами (цифры в записи числа не повторяются)?

*Решение:*

А) в двузначном числе на первом месте может стоять любая из пяти нечетных цифр, на втором – любая из четырех оставшихся. Всего будет 5\*4 = 20 чисел.

Б) 4\*4 = 16 чисел. Так как число с нуля начинаться не может, то на первом месте слева может стоять любая из цифр 2,4,6,8; на втором - любая из четырех оставшихся четных чисел.

**Ответ:** а) 20; б) 16

**5 (483).**

У рыболова, любителя математики, спросили:» Сколько весит пойманная рыба?» Он ответил:» Три четверти килограмма и еще три четверти своего веса»

Сколько весит рыба?

**Ответ:** 3 кг

**6 (489).**

Какое наименьшее число гирь нужно взять, чтобы можно было взвесить любую массу 1 кг, 2 кг, 3 кг, …, 40 кг?

*Решение:*

1. 1и 3. Получаем 1,3-1,3,3+1, то есть 1,2,3,4.
2. Имея еще 9, получаем 5,6,7,8, отнимая от 9 – 1,2,3,4.
3. Дальше 27; 27±(1…13).

Итак, нужны гири 1,3,9,27.

**Ответ:** 4 гири: 1 кг, 3 кг, 9 кг, 27 кг.

# Используемые источники:

1. И.Я. Депман, Н.Я. Виленкин. «За страницами учебника математики: Пособие для учащихся 5 – 6 классов сред школ. – М.: «Просвещение», 1989 г.

2. А.Д Блинкос, А.В. Семёнов и др. «Математика: Интеллектуальные марафоны, турниры, бои. 5-11 классы». М, «Первое сентября, 2004 г.

3. «Все задачи "Кенгуру"», С-П.,2010 г.

4. Л.М.Лихтарников. «Занимательные задачи по математике», М.,1996г.

5. Е.В.Галкин. «Нестандартные задачи по математике», М., 1996г.

6.Е.В.Алтухова, «Математика 5-11 классы: Уроки учительского мастерства». Волгоград, Учитель, 2009 г.

7. А.Я.Кононов. «Математическая мозаика», М., 2004 г.

8. Б.П.Гейдман. «Подготовка к математической олимпиаде», М., 2007 г.

9. Т.Д.Гаврилова. «Занимательная математика», изд. Учитель, 2005 г.

10. Ю.В. Лепехин. «Олимпиадные задания по математике. 5-6 классы/авт.-сост. Ю. В. Лепехин. – Волгоград, Учитель, 2011 г. – 237 с.

11. Билл Хэндли. Быстрая математика: Секреты устного счета/ Б.Хэндли; пер. с англ. Е. А. Самсонов. – Минск: Попурри, 2017 г. – 304 с.

12. Э. Катлер. Система быстрого счета по Трахтенбергу/ Э. Катлер; пер. с англ. П.Г.Каминского и Я.О.Хаскина. –Москва: Просвещение, 1967 г. – 134 с.

13. <http://www.fizmatolimp.ru/zanimatelno4.html>

# Приложение 1 – Пояснение метода Решения примеров в уме

При использовании изложенного выше подхода очень важно то, что возникает перед вашим мысленным взором, или то, что вы произносите про себя. Это может помочь вам решать задачи с большей легкостью и с более высокой скоростью. Давайте умножим 16 на 16 и затем посмотрим, что мы могли бы при этом проговаривать про себя.

Складываем накрест. 16 плюс 6 (от второго множителя 16) равно 22. Потом умножаем на 10 и получаем 220. 6, умноженное на 6, равно 36. Прибавляем сначала 30, а потом 6. 220 плюс 30 равно 250, плюс еще 6 – получаем 256. Про себя мы могли бы при этом проговаривать: «Шестнадцать плюс шесть, двадцать два, двести двадцать. Тридцать шесть, двести пятьдесят шесть». Обретя некоторый навык, вы сможете опускать половину всего этого. Вам не надо будет комментировать буквально каждый свой шаг. Достаточно будет сказать: «Двадцать два, двести пятьдесят шесть».

Практикуйтесь в том, как вы проговариваете про себя ход решения. Произносить только самое необходимое во время вычисления – значит более чем вдвое сократить время решения.

Как вы станете вычислять 7 × 8 в уме? Вы немедленно представите себе цифры 3 и 2 в кружках под 7 и 8. Затем отнимите 2 от 7 (или 3 от 8) и после того, как тут же умножите на 10, скажете вслух: «Пятьдесят». 3 на 2 равно 6. Вслух же вы произнесете практически без паузы: «Пятьдесят…шесть».

А как насчет 6 × 7? Вы немедленно представите себе цифры 4 и 3 в кружках под 6 и 7. 6 минус 3 дает 3, поэтому вы скажете про себя: «Тридцать». 4 на 3 дает 12, плюс 30 – 42. Про себя же вы просто проговорите: «Тридцать, сорок два».

# Приложение 2 –“Использование опорного числа”

Вычисляя произведение 6 на 7 в уме, вы автоматически используете опорное число – 10. Ваш промежуточный результат равен 30. Вы говорите: «Тридцать…» Затем вычисляете: 4 на 3 равно 12. Вы не скажете вслух: «Тридцать двенадцать». Вам известно, что необходимо прибавить 12 к 30, чтобы получить ответ.

Ответ прост: всегда используйте опорное число.

По мере освоения описанных здесь методов вы обнаружите, что автоматически используете опорное число, даже когда уже не записываете его во время вычислений.

# Приложение 3 –“Метод быстрого вычитания”

Как самым простым способом вычесть 70 из числа? Разрешите мне поставить вопрос по-другому: каков простейший способ вычесть в уме 9 из 56?

56 – 9 =

Я уверен, что вы знаете правильный ответ, но как вы его получили? Некоторые люди сначала отняли бы 6 от 56, чтобы получить 50, а затем отняли бы 3, что осталось от 9, и получили бы 47. Кое-кто отнял бы 10 от 56 и получил бы 46. Затем прибавил бы к ответу 1, поскольку отнята была лишняя единица (10 = 9 + 1). В результате опять получилось бы 47.

Еще кто-нибудь решал бы данную задачу столбиком на листе бумаги. При этом ему пришлось бы переносить и занимать разряды в уме. Это, возможно, самый длинный способ решения. Не забывайте, что:

**Самый простой путь решения задачи является наискорейшим способом и самым защищенным от ошибок.**

Для большинства людей самый простой способ вычитания 9 из числа – это отнимание от него сначала 10, а затем прибавление 1. Самый простой способ отнять 8 – это вычесть 10, а затем прибавить 2. Чтобы отнять 7, нужно

вычесть 10, а потом прибавить 3 к ответу. Вот еще несколько «простейших» способов:

• Каков самый простой способ вычесть 90 из числа? Отнять от него 100 и прибавить 10.

• Каков самый простой способ вычесть 80 из числа? Отнять от него 100 и прибавить 20.

• Каков самый простой способ вычесть 70 из числа? Отнять от него 100 и прибавить 30.

# Приложение 4 –“Метод проверки ответов - выбрасывание девяток” Каким образом работает данный метод?

Чем объяснить способ выбрасывания девяток? Почему цифры числа дают в сумме остаток от деления на 9?

А секрет вот в чем.

9 равно 10 минус 1. Для каждой десятки, содержащейся в числе, вы получаете одну девятку и остаток 1. Если число содержит два десятка (20), получаем две девятки и остаток 2. 30 дает три девятки и остаток 3.

Рассмотрим число 32: оно состоит из 30, то есть трех десятков, и 2, то есть двух единиц. Находя остаток от деления на 9, в случае 30 получаем три девятки и остаток 3. Две единицы в числе 32 сами являются остатком от деления на 9, поскольку 2 на 9 разделить нельзя. Переносим остаток 3 от 30 и прибавляем его к остатку 2.

3 + 2 = 5

Таким образом, 5 является остатком от деления 32 на 9. Для каждой сотни в числе мы получаем десять девяток и остаток 10. Он также делится на 9 и дает остаток 1. В результате для каждой сотни имеем остаток 1. Если взять число 300, остатком от деления его на 9 будет 3.

Иначе посмотреть на данное свойство можно таким образом:



Иными словами, каждая единица в любом разряде числа соответствует одной единице остатка.

Например, в числе 32145 цифра 3 обозначает десятки тысяч – для каждого десятка тысяч будет иметься остаток, равный 1. В данном случае суммарный остаток будет 3.

Цифра 2 обозначает тысячи. Для каждой тысячи остаток будет равен 1. То же самое можно сказать и о сотнях, и о десятках. Цифра единиц сама является остатком, если только она не равна 9. В последнем случае мы просто выбрасываем цифру 9.

Таким замечательным свойством обладает число 9. Его можно с успехом применять для проверки ответов и делимости на 9. Помимо того, что оно помогает в делении на 9, данное свойство позволяет лучше понять суть деления как операции над числами.

# Приложение 5 –Дополнительные задачи на смекалку

**На аэростате**

Аэростат свободно и неподвижно держится в воздухе. Из гондолы его вылез человек и начал по тросу взбираться вверх. Куда подвинется при этом аэростат: вверх или вниз?

Ответ: Аэростат должен податься вниз, так как, взбираясь по тросу вверх, человек отталкивает его вместе с шаром в обратную сторону. Здесь происходит то же, что и при ходьбе человека по дну лодки: лодка подвигается при этом назад.

**Защита авторского права**

Как защищают свои издания от пиратов, которые хотели бы их скопировать, некоторые издатели словарей и атласов?

Ответ: Обычно издатели включают в словарь несуществующее слово, а в атлас помещают несуществующий остров. Если они обнаруживаются в каком-то другом издании, факт копирования становится несомненным.

**Мешки с золотом**

Имеется 10 мешков с монетами (количество монет в каждом мешке одинаковое). В девяти мешках монеты золотые, а в одном - фальшивые. Вес настоящей золотой монеты 5 грамм, а вес фальшивой - 4 грамма. Как за одно взвешивание на весах (весы взвешивают с точностью до грамма) определить, в каком из мешков монеты фальшивые?

Ответ: Пронумеруем мешки от 1 до 10. Из первого мешка возьмем 1 монету, со второго 2, из третьего 3, и так до 10 монет (суммарно 55 монет). Произведем взвешивание этих монет. Если бы все монеты были золотыми, то весили бы 275 грамм. Если при нашем взвешивании не будет хватать 1 грамма, то фальшивые монеты в первом мешке, если 2-х грамм - то во втором, и так далее до 10-ти.

**Изготовление гири**

Довольно часто, при изготовлении гири в основной металл намеренно вкрапляют кусочек свинца или меди. Для чего это делается?

Ответ: Как бы точно ни была изготовлена гиря, все же фактически вес ее неизбежно несколько отличается от обозначенного на ней веса. Чтобы избежать этой неточности, гирю намеренно делают несколько тяжелее требуемого веса. А затем от незначительного лишнего веса избавляются спиливанием небольшого количества вкрапленной в гирю меди или свинца. Такое спиливание производится очень легко, так как медь и свинец, довольно мягкие металлы.

**С каемкой или без?**

Почему блюдце всегда имеет кольцевидную каемку с нижней стороны?

Ответ: Блюдце, тарелка или чашка - должны ровно стоять на горизонтальном столе. Для этого их дно шлифуется, но шлифовать всю поверхность дна было бы дорого и долго. Гораздо легче отшлифовать только кольцевую кромку дна.

**Безбрежное море**

Мы часто произносим: "безбрежное море". А существует ли в действительности "безбрежное море", то есть море, у которого нет берегов?

Ответ: Сарагасово море, расположенное в Атлантическом океане. Оно замечательно тем, что почти сплошь покрыто зарослями водорослей и его "берегами" являются воды океана.

**Мост через ручей**

Двое соседей-дачников собрались построить мост через ручей, разделяющий их дачные участки. Расстояние от ручья до домика каждого дачника разное, причем домик одного дачника располагается чуть ниже по течению относительно домика другого. Как построить мост через ручей, чтобы он отстоял на одинаковом расстоянии от обоих домиков?

Ответ: Задача решается с помощью несложных геометрических расчетов.

Сначала замеряем расстояние (по прямой линии) между домиками и делим его пополам. Для наглядности можно воспользоваться длинной веревкой, натянув ее между домиками. В средней части веревки делаем отметку и устанавливаем из нее перпендикуляр (к веревке) по направлению к ручью. Точка пересечения перпендикуляра с ручьем укажет на искомое место для постройки моста.

**Что быстрее?**

Если шар, гладкий куб и цилиндр будут одновременно пущены вниз по наклонной плоскости, что первым очутится внизу?

**Два числа**

Назовите два числа, у которых количество цифр равно количеству букв, составляющих название каждого из этих чисел.

Ответ: "сто" - 100; "миллион" - 1000000

**Лестничные ступеньки**

Лена живет на четвертом этаже, при этом, поднимаясь к себе домой, она проходит по лестнице 60 ступенек. Юля живет в этом же подъезде на втором этаже. Сколько ступенек проходит Юля, поднимаясь к себе домой на второй этаж?

Ответ: Для того, чтобы подняться на 4-й этаж, Лене необходимо пройти три лестничных пролета (60 ступенек). Чтобы подняться на 2-й этаж, Юле необходимо пройти всего лишь один лестничный пролет, то есть 20 ступенек.

**Сколько мне лет?**

Когда моему отцу был 31 год, мне было 8 лет, а теперь отец старше меня вдвое. Сколько мне лет теперь?

Ответ: 23 года. Разность между годами отца и сына равна 23 годам; следовательно, сыну надо иметь 23 года, чтобы отец был вдвое старше его.

**Шум леса**

Как вы думаете, одинаково ли шумят хвойные и лиственные леса?

Ответ: Шум ветра в лесу меняется в зависимости от породы деревьев. Сосны и ели разбивают ветер на вихри, следующие один за другим очень часто; при этом получается свистящий звук, имеющий очень высокий тон. В лиственном лесу посто-янно стоит шум, потому что широкая поверхность листьев разбивает ветер на небольшие струйки. Листья, дрожа, трутся друг о друга, шелестят. Весной, когда листья молодые и нежные, шелест их мягок; грубеет он осенью, когда листья становятся более жесткими.

**Два человека**

Идут рядом два человека, один из них - отец сына другого. Как такое может быть?

Ответ: Это отец и мать ребенка.

**Тиканье часов**

Положите свои карманные часы на стол, отойдите от них на несколько шагов и прислушайтесь к их тиканью. Если в комнате достаточно тихо, то вы услышите, что ваши часы идут словно с перерывами: то тикают короткое время, то на несколько секунд замолкают, то снова начинают идти и т.д. Чем можно объяснить такой неравномерный ход часов?

Ответ: Загадочные перерывы в тиканье часов объясняются утомлением слуха. Наш слух притупляется на несколько секунд, и в эти промежутки мы не слышим тиканья. Спустя короткое время утомление проходит, и прежняя чуткость восстанавливается, тогда мы снова слышим ход часов. Затем наступает опять утомление, и т.д.

**Зеленая земля**

Гренландия - огромный остров, покрытый снегом и льдом. Почему человек, открывший этот остров, назвал его Гренландией, т.е. "Зеленой землей"?

Ответ: Гренландию открыл примерно в 982 году скандинавский ярл Эрик Рыжий. Он стремился побудить людей селиться там и поэтому назвал страну Гренландией, так как это название могло привлечь их (на англ. greenland - "зеленая земля").

**Потерянные гайки**

Меняя колесо своей машины, человек уронил все четыре гайки его крепления в решетку канализационного стока, откуда достать их было невозможно. Он уже решил, что застрял здесь, но проходивший мимо мальчик подсказал ему очень дельную мысль, которая позволила ему поехать дальше. В чем состояла его идея?

Ответ: Мальчик предложил отвернуть по одной гайке с каждого из трех колес и закрепить ими четвертое колесо. Сделав это, человек смог доехать до ближайшего гаража на прочно закрепленных колесах.

**Огурец в бутылке**

Всем известно, что есть способ поместить в бутылку модель корабля. Но как сделать, чтобы в бутылке оказался целый спелый огурец, не повредив бутылку?

Ответ: В то время, когда на стебле появляется завязь огурца, необходимо ее поместить, не нарушая стебля в бутылку через горлышко, и в таком виде оставить огурец досозревать. Как известно огурцы созревают очень быстро, и через несколько дней огурец вырастет внутри бутылки.

**Загадочное число**

Трехзначное число состоит из возрастающих (слева направо) цифр. Если это число прочитать, то все слова будут начинаться на одну и туже букву. Что это за число?

Ответ: 147.