МБОУ «Варсковская СШ»

**Научно-исследовательская работа по математике.**

**Тема: *«Различные способы доказательства теоремы Пифагора»***

|  |  |
| --- | --- |
|  | **Авторы проекта**: ученики 8 класса Гавриков Дмитрий и Сусликова Ульяна  **Руководитель**: Локоткова Оксана Анатольевна |

п. Варские

2016

**Содержание:**

**1** Введение…………………………………………………………………..2

**2** Основная часть……………………………………………………………3-8

2.1 Биография Пифагора

2.2История открытия теоремы Пифагора.

2.3Способы доказательства теоремы Пифагора.

**3** Результаты исследования………………………………………………..9

**4** Литература………………………………………………………………..10

**Введение.**

В этом году на уроке геометрии мы познакомились с одной из важнейших теорем для прямоугольного треугольника, известной с древних времен – теоремой Пифагора. Кратко познакомились с историей этой теоремы, рассмотрели ее доказательство, но также узнали, что это одно из ее доказательств. Трудно найти человека, для которого имя Пифагора не ассоциировалось бы с его теоремой. Почти у каждого сохранились воспоминания о «пифагоровых штанах» - квадрате на гипотенузе, равновеликом двум квадратам на катетах. Причина такой популярности теоремы Пифагора очевидна: простота, красота и широкая значимость. В самом деле, теорема Пифагора проста, но не очевидна. Это сочетание двух противоречивых начал и придает ей особую притягательную силу, делает ее красивой. Но, кроме того, теорема Пифагора имеет огромное значение: она применяется в геометрии буквально на каждом шагу, и тот факт, что существует более 100 различных доказательств этой теоремы (геометрических, алгебраических, механических и т.д.), свидетельствует о гигантском числе ее конкретных реализаций. Зная теорему Пифагора можно находить ее новые применения и способы доказательств. Это и то, что теорема Пифагора была известна задолго до его рождения нас и поразило. Мы заинтересовались и решили провести исследование.

**Цель исследования**: рассмотрение других способов доказательства теоремы Пифагора.

**Задачи:**

* Найти новые способы доказательства теоремы Пифагора.
* Исследовать различные способы доказательства данной теоремы, не рассматриваемые в школе.
* Продемонстрировать другим учащимся существование новых способов доказательства теоремы Пифагора.

**Основной метод,** который мы использовали в своей работе – это метод исследования, систематизации и обработки данных.

**Гипотеза:**  возможно ли узнать, другие способы доказательства теоремы Пифагора, не изучаемые в школьном курсе геометрии.

**Объект исследования:**множество различных доказательств теоремы.

**Предмет исследования:**теорема Пифагора

**Основная часть**

**Биография Пифагора**

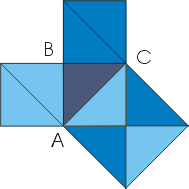
Пифагор родился на острове Самос, одном из самых цветущих островов Ионии, в семье богатого ювелира. Ещё до рождения он был посвящен своими родителями свету Аполлона. Он был очень красив и с детства отличался разумом и справедливостью. С юных лет Пифагор стремился проникнуть в тайны Вечной Природы, постичь смысл Бытия. Знания, полученные им в храмах Греции, не давали ответов на все волнующие его вопросы, и он отправился в поисках мудрости в Египет. В течение 22 лет он проходил обучение в храмах Мемфиса и получил посвящение высшей степени. Здесь же он глубоко изучил математику, “науку чисел или всемирных принципов”, из которой впоследствии сделал центр своей системы. Из Мемфиса, по приказу вторгшегося в Египет Камбиза, Пифагор вместе с египетскими жрецами попадает в Вавилон, где проводит еще 12 лет. Здесь он имеет возможность изучить многие религии и культы, проникнуть в мистерии древней магии наследников Зороастра. Приблизительно в 530 году Пифагор, наконец, возвратился в Грецию и вскоре переселился в Южную Италию, в г. Кротон. В Кротоне он основал пифагорейский союз, который был одновременно философской школой, политической партией и религиозным братством. Школа Пифагора дала Греции целую плеяду талантливых философов, физиков и математиков. С их именем связаны в математике систематическое введение доказательств в геометрию, рассмотрение ее как абстрактной науки, создание учения о подобии, доказательство теоремы, носящей имя Пифагора, построение некоторых правильных многоугольников и многогранников, а также учение о четных и нечетных, простых и составных, о фигурных и совершенных числах, арифметических, геометрических и гармонических пропорциях и средних.

**История открытия теоремы Пифагора.**

Долгое время считали, что до Пифагора эта теорема не была известна. В настоящее вре-мя установлено, что эта величайшая теорема встречается в вавилонских текстах, написанных за 1200 лет до Пифагора. Открытие теоремы Пифагором окружено ореолом красивых легенд. Прокл, комментируя последнее предложение первой книги «Начал» Евклида, пишет: «Если послушать тех, кто любит повторять древние легенды, то придется сказать, что эта теорема восходит к Пифагору; рассказывают, что он в честь этого открытия принес в жертву быка». Впрочем, более щедрые сказители одного быка превратили в одну гекатомбу, а это уже целая сотня. И хотя еще Цицерон заметил, что всякое пролитие крови было чуждо уставу пифагорейского ордена, легенда эта прочно срослась с теоремой Пифагора и через две тысячи лет продолжала вызывать горячие отклики. Так, оптимист Михаил Ломоносов (1711--1765) писал: «Пифагор за изобретение одного геометрического правила Зевсу принес на жертву сто волов. Но ежели бы за найденные в нынешние времена от остроумных математиков правила по суеверной его ревности поступать, то едва бы в целом свете столько рогатого скота сыскалось». А вот ироничный Генрих Гейне (1797—1856) видел развитие той же ситуации несколько иначе: «Кто знает! Кто знает! Возможно, душа Пифагора переселилась в беднягу кандидата, который не смог доказать теорему Пифагора и провалился из-за этого на экзаменах, тогда как в его экзаменаторах обитают души тех быков, которых Пифагор, обрадованный открытием своей теоремы, принес в жертву бессмертным богам». Сегодня теорема Пифагора обнаружена в различных частных задачах и чертежах: и в египетском треугольнике в папирусе времен фараона Аменемхета первого (ок. 2000 до н.э.), и в вавилонских клинописных табличках эпохи царя Хаммурапи (XVIII в. до н.э.), и в древнеиндийском геометрическо-теологическом трактате VII —V вв. до н.э. «Сульва сутра» («Правила веревки»). В древнейшем китайском трактате «Чжоу-би суань цзинь», время создания которого точно не известно, утверждается, что в XII в. до н. э. китайцы знали свойства египетского треугольника, а к VI в. до н.э.—и общий вид теоремы. Несмотря на все это, имя Пифагора столь прочно сплавилось с теоремой Пифагора, что сейчас просто не-возможно представить, что это словосочетание распадется. То же относится и к легенде о заклании быков Пифагором. Да и вряд ли нужно препарировать историко-математическим скальпелем красивые древние предания. Сегодня принято считать, что Пифагор дал первое доказательство носящей его имя теоремы. Увы, от этого доказательства также не сохранилось никаких следов.

**Способы доказательства теоремы Пифагора.**

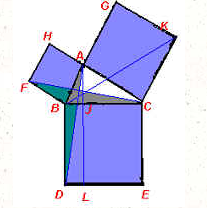
**1. Простейшее доказательство**



Это доказательство получается в простейшем случае равнобедренного прямоугольного треугольника. Вероятно, с него и начиналась теорема. В самом деле, достаточно посмотреть на мозаику равнобедренных прямоугольных треугольников, чтобы убедиться в справедливости теоремы. Например, для такого треугольника АВС: квадрат, построенный на гипотенузе АС, содержит 4 исходных треугольника, а квадраты, построенные на катетах, - по 2. Теорема доказана.

**2.Доказательство Евклида.**

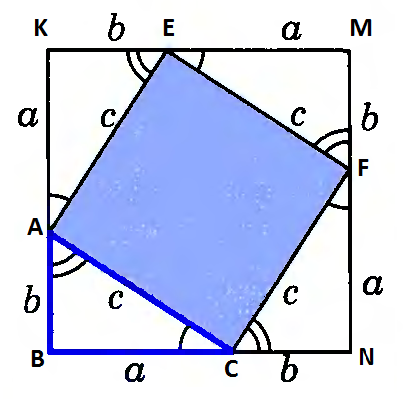
В течение двух тысячелетий наиболее распространенным было доказательство теоремы Пифагора, придуманное Евклидом. Данное доказательство приведено в предложении 47 первой книги «Начал». Это же доказательство рассмотрено и в учебнике А.П.Киселева «Геометрия». Чертёж, применяемый при доказательстве этой теоремы, в шутку называют «пифагоровы штаны». В течение долгого времени он считался одним из символов математической науки.



На гипотенузе и катетах прямоугольного треугольника АВС строятся соответствующие квадраты и доказывается, что прямоугольник BJLD равновелик квадрату ABFH, а прямоугольник JCEL - квадрату АСКG. Тогда сумма квадратов на катетах будет равна квадрату на гипотенузе. В самом деле, затушеванные на рисунке треугольники ABD и BFC равны по двум сторонам и углу между ними: FB = AB, BC = BD и ∠FBC = ∠ABD. Но SABD = 1/2 SBJLD, так как у треугольника ABD и прямоугольника BJLD общее основание BD и общая высота LD. Аналогично SFBC = 1/2 SABFH (BF-общее основание, АВ - общая высота). Отсюда, учитывая, что SABD = SFBC , имеем SBJLD = SABFH. Аналогично, используя равенство треугольников ВСК и АСЕ, доказывается, что SJCEL = SACKG. Итак, SABFH + SACKG = SBJLD + SJCEL = SBCED, что и требовалось доказать.

**3.Алгебраическое доказательство.**

Это доказательство, основанное на площади, рассматривается в учебнике «Геометрия 7-9» Л.С.Атанасяна.

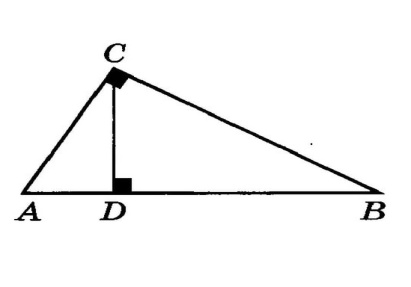
****

Достроим треугольник до квадрата со стороной a+b.Площадь этого квадрата равна (a+b)2

С другой стороны, этот квадрат составлен из четырех равных прямоугольных треугольников, площадь каждого из которых равна ab, и квадрата со стороной с, поэтому S = 4 ab + c2 = 2ab + c2. Таким образом, (a + b)2 = 2ab + c2, откуда c2 = a2 + b2 что и требовалось доказать.

**4.Через подобие треугольников.**

Этот способ рассматривается в учебниках «Геометрия 7-9» А.В.Погорелова и А.П.Киселева «Геометрия».

****

В прямоугольном ∆ АВС (∠С = 90º ) проведём высоту СD. Тогда исходный треугольник разобьётся на два треугольника, тоже являющихся прямоугольными. Полученные треугольники будут подобны друг другу и исходному треугольнику ( первый признак подобия прямоугольных треугольников) Так как у подобных треугольников сходственные стороны пропорциональны, то

АС : АD = АВ : АС = ВС : СD; АВ : ВС = ВС : ВD = АС : СD Получим верные равенства:

АС · АС = АВ · АD , ВС · ВС = АВ · ВD

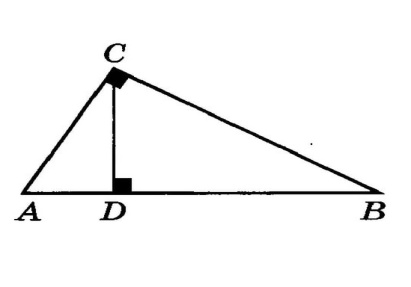
*в · в = с* · АD *а · а = с* ·ВD

Складывая эти два верных равенства, получим

в ² + а ² = с (АD + ВD)

с ² = а ² + в ²Теорема доказана.

**5. Через косинус угла.**

****

Проведем высоту СD из вершины прямого угла С.

По определению косинуса угла соs A = AD/AC = AC/AB, отсюда следует

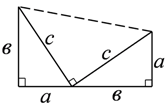
AB·AD = АС2

Аналогично

соs B = BD/BC = BC/AB, значит AB·BD = ВС2

Сложив полученные равенства почленно, получим: АВ2 = АС2 + ВС2

**6. Доказательство Дж. Гардфилда (1882 г.)**



Расположим два равных прямоугольных треугольника так, чтобы катет одного из них был продолжением другого.Площадь рассматриваемой трапеции находится как произведение полусуммы оснований на высоту

S = 

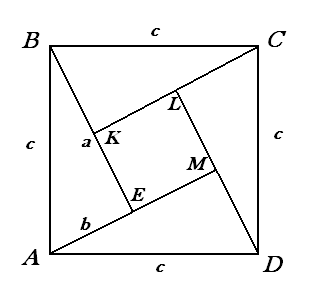
C другой стороны, площадь трапеции равна сумме площадей полученных треугольников:

S = 

Приравнивая данные выражения, получаем:

 или *с2 = a2 + b2*

**7.Старейшее доказательство(содержится в одном из произведений Бхаскары).**

Пусть АВСD квадрат, сторона которого равна гипотенузе прямоугольного треугольника АВЕ (АВ = с, ВЕ = а,

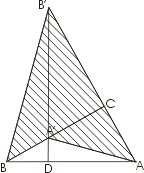
АЕ =b); Пусть СКВЕ = а, DLCK, AMDL 

ΔABE = ∆BCK = ∆CDL = ∆AMD,

значит KL = LM = ME = EK = a-b.

; ;  . .

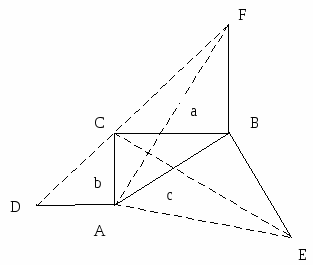
**8.** **Доказательство Хоукинса.**

Приведем еще одно доказательство, которое имеет вычислительный характер, однако сильно отличается от всех предыдущих. Оно опубликовано англичанином Хоукинсом в 1909 году; было ли оно известно до этого - трудно сказать.

Прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C повернем на 90° так, чтобы он занял положение A'CB'. Продолжим гипотенузу A'В' за точку A' до пересечения с линией АВ в точке D. Отрезок В'D будет высотой треугольника В'АВ. Рассмотрим теперь заштрихованный четырехугольник A'АВ'В. Его можно разложить на два равнобедренных треугольника САA' и СВВ' (или на два треугольника A'В'А и A'В'В).   
  
SCAA'= b²/2   
SCBB'= a²/2   
SA'AB'B= (a²+b²)/2   
Треугольники A'В'А и A'В'В имеют общее основание с и высоты DA и DB, поэтому:   
  
SA'AB'B= c·DA/2+ c·DB/2 = c (DA+DB)/2 = c²/2

Сравнивая два полученных выражения для площади, получим: a² + b² = c²   
  
Теорема доказана.

**9. Доказательство Гофмана.**



Треугольник ABC с прямым углом С; отрезок BF перпендикулярен СВ и равен ему, отрезок BE перпендикулярен АВ и равен ему, отрезок AD перпендикулярен АС и равен ему; точки F, С, D  принадлежат одной прямой; четырехугольники ADFB и АСВЕ  равновелики, так как ABF = ЕСВ; треугольники ADF и АСЕ  равновелики; отнимем от обоих равновеликих четырехугольников общий для них треугольник ABC, получим

 с² = а² + b²

**Результаты исследования.**

В результате нашей исследовательской работы, мы рассмотрели несколько различных способов доказательства теоремы Пифагора, которые не представлены в школьном курсе геометрии. Работа над проектом позволили нам расширить свои знания в области геометрии. К сожалению, невозможно привести все доказательства теоремы, однако хочется надеяться, что приведенные примеры убедительно свидетельствуют об огромном интересе сегодня, да и вчера, проявляемом по отношению к теореме Пифагора.

**Литература.**

1.Учебник «Геометрия 7-9» Л.С.Атанасян и др.М:Просвещение,2010

2. Учебник «Геометрия 7-9» А.В.Погорелов.М:Просвещение,2009

3.Киселев А.П. Геометрия/ Под ред.Н.А.Глаголева М:ФИЗМАТЛИТ,2004

4.Интернет- ресурсы.